

SYSTÈMES DU 1^{ER} ORDRE

Equation différentielle et solution

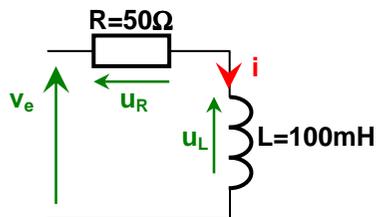
OBJECTIFS

- ① Etablir l'équation différentielle régissant un système.
- ② Déterminer la solution de l'équation (expression de la sortie en fonction du temps)
- ③ Tracer la courbe de sortie pour retrouver les propriétés de la courbe "1^{er} ordre".

I- CIRCUIT "RL série"

1- Présentation du système

Soit le système constitué de la partie électrique simplifiée d'un enroulement de **moteur pas à pas** (schéma ci-dessous) :



Rappel: $u_R = R \cdot i$
 $u_L = L \frac{di}{dt}$



L'entrée du système est la tension v_e d'alimentation du moteur (échelon $E \cdot \Gamma(t)$ d'amplitude $E = 5V$) et la sortie du système est le courant i traversant le circuit.

2- Détermination de $i(t)$

- ① Ecrire l'équation différentielle relative au système (entrée constante E et sortie $i(t)$).
- ② Mettre l'équation différentielle sous la forme : $\tau \frac{di(t)}{dt} + i(t) = f(t)$.
- ③ Exprimer τ et $f(t)$ en fonction des éléments du circuit.
On rappelle que $f(t) = I_\infty$.
- ④ La solution de l'équation différentielle est $i(t) = A + B \cdot e^{-t/\tau}$.
Déterminer alors les expressions de A et B sachant que $i(0) = 0$ et $i_\infty = E/R$.

3- Tracé du graphe $i(t)$ (utilisation des valeurs numériques)

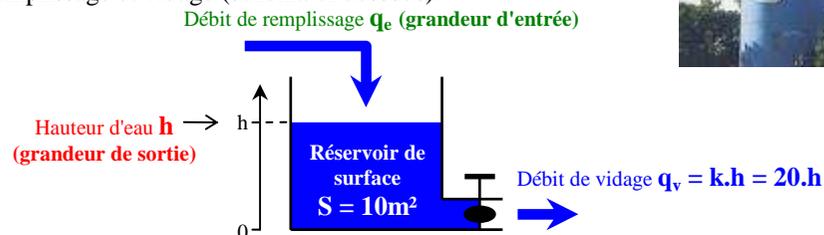
- ① Tracer, point par point, la courbe $i(t)$ pour $0 < t < 10ms$.
- TS IRIS (Physique Appliquée) Christian BISSIERES <http://cbissprof.free.fr>

- ② Retrouver, sur la courbe, les propriétés suivantes :
 - L'asymptote horizontale a pour ordonnée $I_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} i(t)$.
 - L'asymptote horizontale coupe la tangente à l'origine à l'instant $t = \tau$.
 - A l'instant $t = \tau$, $i(t)$ atteint 63% de sa valeur finale I_∞ ($i(\tau) = 0,63 I_\infty$).
 - Aux instants $t = 2\tau$, 3τ et 5τ la sortie $i(t)$ atteint 86% , 95% et 98% de I_∞ .

II- SYSTÈME HYDRAULIQUE

1- Présentation du système

Soit le système constitué d'un réservoir d'eau (vide à l'instant $t=0$) avec remplissage et vidage (schéma ci-dessous):



Phrases "clé" : Le débit de vidage est proportionnel à la hauteur : $q_v = k \cdot h$ ($k=20m^2/h$)
 Le débit ($q_e - q_v$) est responsable de la variation dV/dt du volume $V=S \cdot h$

q_e est un échelon d'amplitude $Q_e = 30m^3/h$ (débit constant Q_e à partir de $t = 0$).

2- Détermination de $h(t)$

- ① Ecrire l'équation différentielle du système (entrée constante Q_e et sortie $h(t)$).
- ② Mettre l'équation différentielle sous la forme : $\tau \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = f(t)$.
- ③ Exprimer τ et $f(t)$ en fonction des éléments du système.
On rappelle que $f(t) = h_\infty$.
- ④ La solution de l'équation différentielle est $h(t) = A + B \cdot e^{-t/\tau}$.
Déterminer alors les expressions de A et B sachant que $h(0) = 0$ et $h_\infty = Q_e/k$.

3- Tracé du graphe $h(t)$ (utilisation des valeurs numériques)

- ① Tracer, point par point, la courbe $h(t)$ pour $0 < t < 3h$.
- ② Retrouver, sur la courbe, les 4 propriétés importantes de la courbe "1^{er} ordre" déjà vues dans le circuit "RL série".