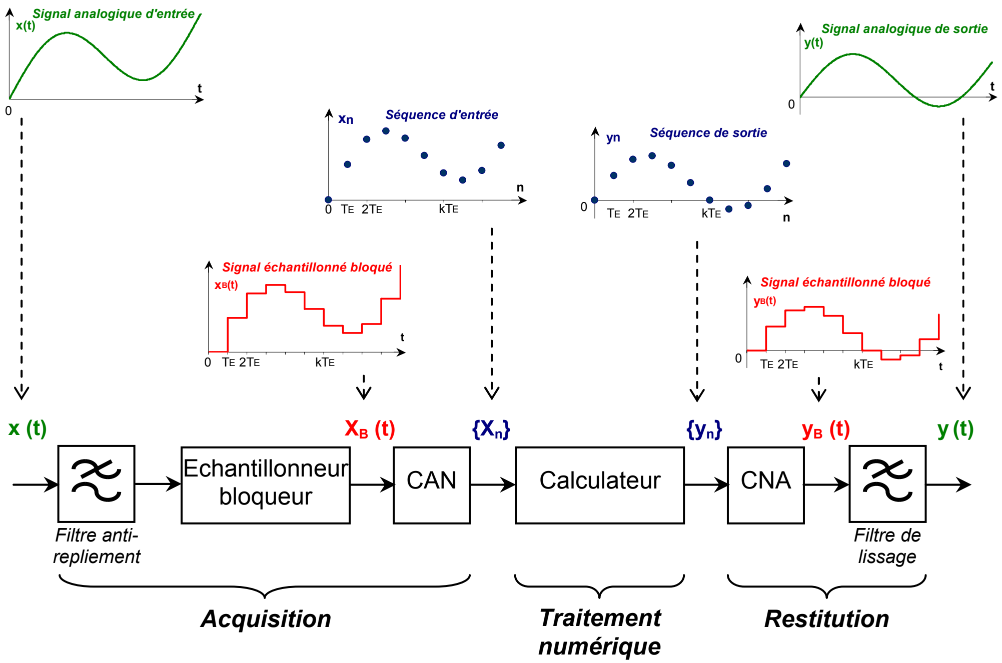
Cours Thème V

TRAITEMENT NUMÉRIQUE DU SIGNAL

I- EXEMPLE D'UNE CHAÎNE DE TRAITEMENT NUMÉRIQUE DU SIGNAL

Une chaîne de traitement numérique du signal a la structure suivante :



Rôle des filtres :

- Filtre anti-repliement: Il élimine les fréquences indésirables (parasites, bruits …)qui ne respectent pas la condition de Shanon.
  Le filtre élimine les fréquences supérieures à $F_E / 2$ ($F_E = 1/T_E$)

- Filtre de lissage : le signal $y_B(t)$ en sortie du CNA est un signal échantillonné bloqué (en "marches d'escalier"). Le filtre de lissage permet d'atténuer ces "marches" et de restituer un signal lissé.

Rôle du calculateur : L'unité de traitement numérique ou calculateur réalise des opérations sur les séquences d'entrée $\{x_n\}$ et de sortie $\{y_{n-1}\}$ pour générer la séquence de sortie $\{y_n\}$.
Ce sont des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication par une constante et de retard.

Un exemple d'opérations est représenté ci-dessous :

$$y_n = 2x_n - 3x_{n-1} + 1{,}5y_{n-1}\ .$$

Remarque : La valeur du signal x(t) à l'instant $t = k.T_E$ se note $x(k.T_E)$. Pour des raisons de commodité on notera $x_k = x(k.T_E)$.
On note $\{x_n\}$, l'ensemble des valeurs x_k pour $0 \le k \le n$.

II- LA TRANSFORMATION EN z

1- Définition

La transformée en z est la transformée de Laplace du signal échantillonné $\{x_n\}$.

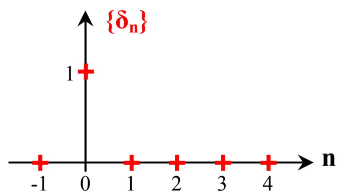
$$\mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t).e^{-pt}dt$$ (x(t) est un signal analogique).

$$\mathcal{L}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.e^{-pnT_E}$$ ($\{x_n\}$ est le résultat de la numérisation de x(t) à la période d'échantillonnage T_E).

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}}$$ avec $z = e^{pT_E}$

2- Transformées en z de séquences $\{x_n\}$ simples

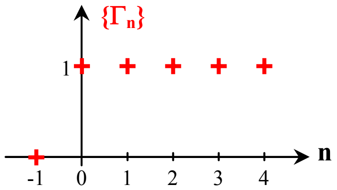
① Séquence impulsion unité $\{\delta_n\}$



$$\begin{cases} \delta_n = 1 & \text{pour } n = 0 \\ \delta_n = 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{\delta_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^{-n} = \delta_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{Z}\{\delta_n\} = 1}$$

② Séquence échelon unité $\{\Gamma_n\}$



$$\begin{cases} \Gamma_n = 1 & \text{pour } n \geq 0 \\ \Gamma_n = 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{\Gamma_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n z^{-n} = z^0 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{Z}\{\Gamma_n\} = \frac{z}{z-1}}$$

3- Propriétés

De part sa définition, la transformée en z aura les mêmes propriétés que la transformée de Laplace.

① Linéarité : $\mathcal{Z}[\alpha\{x_n\} + \beta\{y_n\}] = \alpha X(z) + \beta Y(z)$

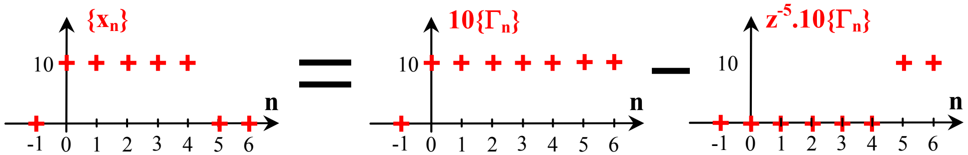
② Théorème du retard : $\mathcal{Z}\{x_{n-k}\} = z^{-k} X(z)$

③ Théorème de la valeur initiale : $x(0) = \lim\limits_{z \to \infty} X(z)$

④ Théorème de la valeur finale : $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{z \to 1} (z-1)X(z)$

Exemple 1 : $\lim\limits_{n \to \infty} 5.\Gamma_n = 5 \lim\limits_{z \to 1} (z-1)\frac{z}{z-1} = 5 \lim\limits_{z \to 1} z = \mathbf{5}$.

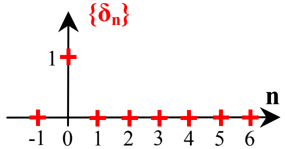
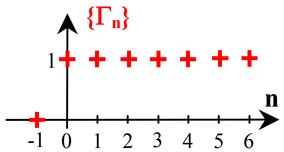
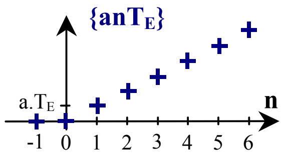
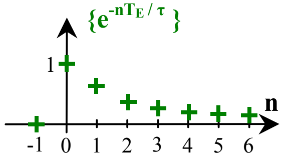
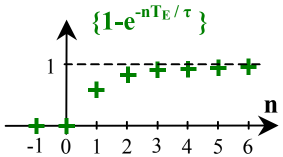
Exemple 2 : Exprimons la transformée en z de la séquence $\{x_n\}$ ci-dessous :



$$\mathcal{Z}\{x_n\} = 10.\mathcal{Z}\{\Gamma_n - z^{-5}\,\Gamma_n\} = 10\left[\frac{z}{z-1} - z^{-5}\frac{z}{z-1}\right] = 10\,\frac{z - z^{-4}}{z-1} .$$

4- Table des transformées en z

Dans le tableau ci-dessous, on note X(z) la transformée en z de la séquence { xn }.

	$\{ x_n \}$	X (z)
	$\{ \delta_n \}$	1
	$\{ \Gamma_n \}$	$\frac{z}{z-1}$
	$\{ a\, n\, T_E \}$	$aT_E \frac{z}{(z-1)^2}$
	$\{ e^{-nT_E/\tau} \}$	$\frac{z}{z - e^{-T_E/\tau}}$
	$\{ 1 - e^{-nT_E/\tau} \}$	$\frac{z(1 - e^{-T_E/\tau})}{(z-1)(z - e^{-T_E/\tau})}$

Remarque : Dans les deux dernières séquences, il ne faut pas confondre T_E et τ. Dans la pratique, on a $T_E << \tau$.

5- Transformée en z inverse

On connaît la transformée inverse d'un signal et on désire retrouver les échantillons temporels.

Méthode 1 : Utilisation de la table.

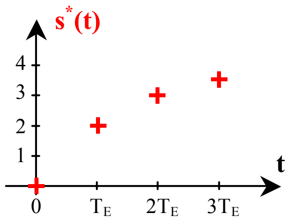
Méthode 2 : Méthode de la division

Exemple : $s(z) = \dfrac{2z}{(z-1)(z-0{,}5)} = \dfrac{2z^{-1}}{1-1{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2}}$

Effectuons une division Euclidienne de $2z^{-1}$ sur $1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}5z^{-2}$

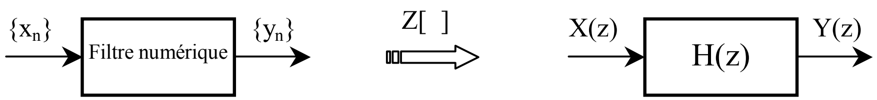
$$\begin{array}{llll|lll} 2z^{-1} & & & & 1 & -1{,}5z^{-1} & +0{,}5z^{-2} \\ \cline{5-7} & 3z^{-2} & -z^{-3} & & 2z^{-1} & +3z^{-2} & +3{,}5z^{-3} \\ & & 3{,}5z^{-2} & -1{,}5z^{-4} & & & \end{array}$$

Les échantillons sont : $s(T_E) = 2$; $s(2T_E) = 3$; $s(3T_E) = 3{,}5$; …
Pour calculer d'autres échantillons, il faut continuer la division.



III- FILTRAGE NUMÉRIQUE

1- Transmittance en z d'un filtre numérique



Avec $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$ transmittance en z du filtre numérique.

■ Exemple : Soit $H(z) = \dfrac{4z}{(z-2)(z-1)}$.

Déterminons Y(z) sachant que $\{x_n\}$ est la séquence d'un échelon d'amplitude 2.

Solution : $Y(z) = H(z)X(z) = \dfrac{4z}{(z-2)(z-1)} \times \dfrac{2z}{z-1} = \dfrac{8z^2}{z^3-4z^2+3z+2}$

Pour finir, on peut déterminer les échantillons $\{y_n\}$ par la méthode de la division.

2- Passage de la transformée en z à l'équation de récurrence

Le filtre numérique exécute un programme traduisant une équation de récurrence entre les échantillons du signal d'entrée $\{x_n\}$ et les échantillons du signal de sortie $\{y_n\}$.

L'objet de ce chapitre est de trouver cette équation de récurrence à partir de H(z).

La méthode repose sur le **principe suivant** : ***multiplier par z^{-1} revient à retarder de T_E (théorème du retard).***

■ Exemple : Soit $H(z) = \dfrac{z^2-3z}{z^2-3z+2}$.

① Multiplication du numérateur et du dénominateur Par z^{-2} pour n'avoir que des puissances négatives :

$$H(z) = \frac{z^2-3z \times z^{-2}}{z^2-3z+2 \times z^{-2}} = \frac{1-3z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} .$$

② Produit en croix :

$$Y(z)\left(1-3z^{-1}+2z^{-2}\right) = X(z)\left(1-3z^{-1}\right) .$$

③ Utilisation du théorème du retard :

$y_n - 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = x_n - 3x_{n-1}$

$\Rightarrow \boxed{y_n = x_n - 3x_{n-1} + 3y_{n-1} - 2\, y_{n-2}}$ C'est l'équation de récurrence.

3- Passage de l'équation de récurrence à la transformée en z

■ Exemple : Soit l'équation de récurrence d'un filtre numérique

$$y_n = 2x_n + y_{n-1} - 6y_{n-2}$$

① On groupe les y_i et les x_i

$$y_n - y_{n-1} + 6y_{n-2} = 2x_n$$

② On appliqué le théorème du retard

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + 6z^{-2}Y(z) = 2X(z)$$

③ Détermination de H(z)

$$Y(z)\,[\,1 - z^{-1} + 6z^{-2}\,] = 2X(z)$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 - z^{-1} + 6z^{-2}} = \frac{2z^2}{z^2 - z + 6}\,.$$

4- Calcul de $\{y_n\}$ à partir de $\{x_n\}$ et de l'équation de récurrence

■ Exemple : Soit l'équation de récurrence d'un filtre numérique

$$y_n = \frac{3}{4}y_{n-1} + \frac{1}{4}x_n$$

On applique à l'entrée du filtre, une suite d'échantillons
$\{x_n\} = 3\{\Gamma_n\}$ correspondant à un échelon d'amplitude 3.

La détermination des échantillons de sortie débute par le calcul de y_0

$$y_0 = \frac{3}{4}y_{0-1} + \frac{1}{4}x_0 = \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$$

$$y_1 = \frac{3}{4}y_0 + \frac{1}{4}x_1 = \frac{3}{4} \times 0{,}75 + \frac{1}{4} \times 3 \approx 1{,}313$$

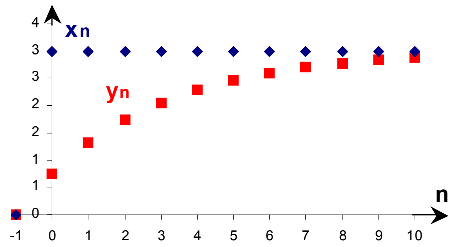
$$y_2 = \frac{3}{4}y_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{3}{4} \times 1{,}313 + \frac{1}{4} \times 3 \approx 1{,}734$$

$$y_3 = \frac{3}{4}y_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{3}{4} \times 1{,}734 + \frac{1}{4} \times 3 \approx 2{,}051$$

………..

Les échantillons y_n pour n variant de 0 à 10 sont représentés dans le tableau et le graphe ci-dessous :

n	xn	yn
-1	0	0,000
0	3	0,750
1	3	1,313
2	3	1,734
3	3	2,051
4	3	2,288
5	3	2,466
6	3	2,600
7	3	2,700
8	3	2,775
9	3	2,831
10	3	2,873



5- Types de filtres numériques

a- Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Ce sont des filtres non récursifs car la sortie ne dépend que des valeurs d'entrée.
L'équation de récurrence a la forme générale suivante :
$y_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + a_kx_{n-k}$

Ce qui donne la transmittance :
$H(z) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \ldots + a_kz^{-k}$.

Ces filtres sont toujours stables.

b- Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Ce sont des filtres non récursifs car la sortie ne dépend que des valeurs d'entrée.
L'équation de récurrence a la forme générale suivante :
$y_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + a_kx_{n-k} - b_1y_{n-1} - b_2y_{n-2} - \ldots - b_\ell\, y_{n-\ell}$

Ce qui donne la transmittance :

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \ldots + a_kz^{-k}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \ldots + b_\ell z^{-\ell}}\,.$$

Ces filtres peuvent être instables.