Cours Thème VII
"Systèmes linéaires"

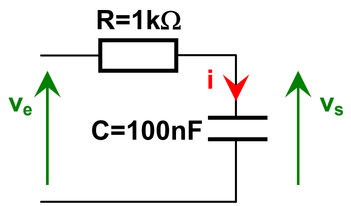
2- Outil d'étude d'un système analogique linéaire

OBJECTIFS

- Utiliser un nouvel outil pour résoudre une équation différentielle relative à un système.
- Etudier un système électrique directement sans passer par l'équation différentielle.
- Utiliser des théorèmes pour évaluer la valeur initiale et la valeur finale de la sortie d'un système.
- Représenter un système à l'aide de "schémas bloc" dans le formalisme de Laplace.

I- POURQUOI UTILISER UN NOUVEL OUTIL ? (Etude d'un exemple)

<u>1- Filtre "RC série" avec entrée échelon</u> *(Méthode classique)*



Pour le circuit ci-contre, on se propose de prévoir la forme du signal de sortie v_s lorsque l'entrée v_e est un échelon d'amplitude E.

On va naturellement utiliser la méthode du chapitre précédent :

① Equation différentielle : $v_e = E = Ri + v_s$ avec $i = C\dfrac{dv_s}{dt} \Rightarrow \boxed{RC\dfrac{dv_s}{dt} + v_s = E}$.

② Solution de l'équation : $\boxed{v_S(t) = A + B.e^{-\frac{t}{RC}} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$ avec $\tau = RC = 0{,}1\text{ms}$.

<u>Remarque</u> : Dans ce cas, l'équation différentielle se résout facilement car le second membre E est de type "constant" (échelon de tension).

<u>2- Filtre "RC série" avec entrée de type "rampe"</u> *(Méthode classique)*

Reprenons le même circuit mais avec une entrée de type "rampe" $v_e(t) = a.t = 1.10^4$ t .

Essayons de prévoir la forme de v_s en résolvant l'équation différentielle (méthode du chapitre précédent) :

① Equation différentielle : $RC\dfrac{dv_s}{dt} + v_s = a.t$.

② Solution de l'équation : **Trop compliqué car le second membre n'est pas "constant"**.

Pour évaluer le signal $v_s(t)$ on va utiliser un nouvel outil dont le principe est de **transformer l'équation différentielle en un polynôme**.

<u>2- Filtre "RC série" avec entrée de type "rampe"</u> *(Nouvelle méthode)*

L'équation différentielle comporte une constante (**τ = RC**) et des fonctions (signaux) qui dépendent du temps ($v_s(t)$; $\dfrac{dv_s(t)}{dt}$ et a.t).

Nous allons transformer toutes le fonctions du temps en fonctions d'un variable appelée "p":

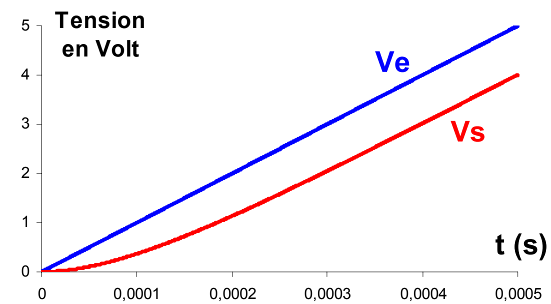
- $v_s(t)$ deviendra $V_S(p)$ *Notation des fonction de "p" en majuscule*
- $\dfrac{dv_s(t)}{dt}$ deviendra $p.V_S(p)$ *Multiplication par "p" pour la dérivée*
- a.t deviendra $\dfrac{a}{p^2}$ *$\dfrac{a}{p^2}$ est trouvé dans le tableau des transformées (voir page suivante).*

① L'équation devient : $\tau.pV_S(p) + V_S(p) = \dfrac{a}{p^2}$

② Exprimons $V_S(p)$: $V_S(p)(1 + \tau p) = \dfrac{a}{p^2} \Rightarrow V_S(p) = \dfrac{a}{p^2(1+\tau p)}$

③ Exprimons $v_s(t)$: Le tableau des transformées (page suivante) nous indique que $\dfrac{a}{p^2(1+\tau p)}$ correspond à $v_s(t) = a.\tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{t}{\tau} - 1\right)$.

Le graphe ci-contre montre les variations de $v_e(t)$ et $v_s(t)$:



II- LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

1- Définition *(Pour information)*

A toute fonction réelle du temps f(t), on associe une fonction **F(p)** de la variable complexe **p = σ + jω** par la transformation :

$$\mathcal{L}[\, f(t)\,] = F\,(P) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

2- Propriétés *(A connaître et à savoir utiliser)*

- Linéarité

$$\mathcal{L}[\, \alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t)\,] = \alpha\, F_1(p) + \beta\, F_2(p)$$

- Dérivation

$$\mathcal{L}[\, f'\,] \;=\; p\,F(p) + f\,(0^+)$$ *(On aura très souvent : $f(0^+)=0$)*

- Intégration

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

- Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

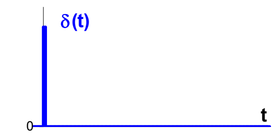
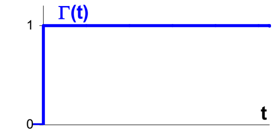
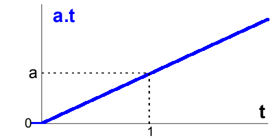
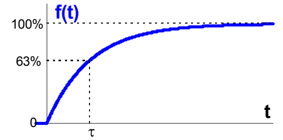
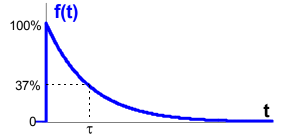
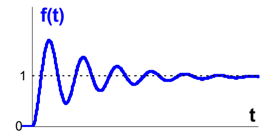
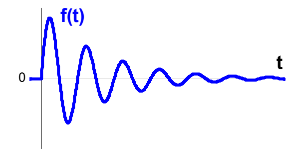
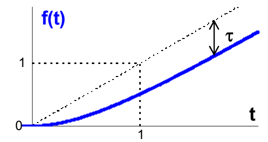
- Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{p\to +\infty} pF(p)$$

- Théorème du retard *(Utilisé pour le filtrage numérique avec $z = e^{pTe}$)*

$$\mathcal{L}[\, f(t-\tau)\,] = e^{-\tau p}\, F(p)$$

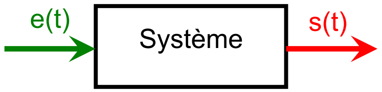
3- Tableau des transformées

Graphe de f(t)	f(t)	F(p)
	Impulsion unitaire δ(t)	1
	Echelon unité Γ(t)	$\frac{1}{p}$
	Rampe a.t	$\frac{a}{p^2}$
	$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1+\tau p)}$
	$e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}$ ou $\frac{\tau}{1+\tau p}$
	$1-\frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\sin\left[\omega_0\sqrt{1-m^2}\,t+\varphi\right]$ Avec $\tan\varphi = \frac{\sqrt{1-m^2}}{-m}$	$\frac{1}{p\left[1+2m\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2\right]}$ avec m < 1
	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}}e^{-m\omega_0 t}\sin\left[\omega_0\sqrt{1-m^2}\,t\right]$	$\frac{1}{1+2m\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$ avec m < 1
	$\tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{t}{\tau}-1\right)$	$\frac{1}{p^2(1+\tau p)}$

III-TRANSMITTANCE ISOMORPHE

1- Introduction

Considérons le système linéaire ci-dessous (entrée e(t) et sortie s(t)) :



L'équation différentielle linéaire régissant le système est :

$$b_n \frac{d^n s}{dt^n} + ... + b_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + b_1 \frac{ds}{dt} + b_0 s = a_n \frac{d^n e}{dt^n} + ... + a_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + a_1 \frac{de}{dt} + a_0 e$$

Effectuons une transformée de Laplace de cette équation :

$$b_n p^n S(p) + ... + b_2 p^2 S(p) + b_1 p S(p) + b_0 S(p) = a_n p^n E(p) + ... + a_2 p^2 E(p) + a_1 p E(p) + a_0 E(p)$$

$$\Rightarrow \; S(p)\left(b_n p^n + ... + b_2 p^2 + b_1 p + b_0\right) = E(p)\left(a_n p^n + ... + a_2 p^2 + a_1 p + a_0\right)$$

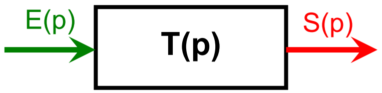
$$\Rightarrow \; S(p) = E(p) \frac{a_n p^n + ... + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_n p^n + ... + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

On peut donc exprimer la sortie S(p) en fonction de l'entrée E(p) et du rapport $\dfrac{a_n p^n + ... + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_n p^n + ... + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$ qui ne dépend que du système.

2- Définition

Pour un système linéaire d'entrée E(p) et de sortie S(p), le rapport $\boxed{T(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}}$ est appelé transmittance isomorphe du système.

La transmittance **T(p) caractérise complètement le système** qui pourra être schématisé ainsi :



Remarque : La sortie du système s'évalue avec l'expression $\boxed{S(p) = T(p)E(p)}$.

3- Système du 1°ordre

Un système linéaire du 1°ordre d'entrée e(t) et de sortie s(t) est régit par l'équation différentielle : $\tau \dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = T_0 e(t)$ avec τ constante de temps et $T_0 = \dfrac{S_\infty}{E_\infty}$ lorsque e(t) est un échelon.

La transformation de Laplace donne :

$$\tau p S(p) + S(p) = T_0 E(p)$$

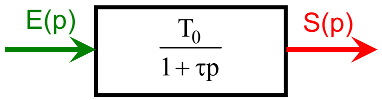
$$\Rightarrow \; S(p)\left[1 + \tau p\right] = T_0 E(p)$$

$$\Rightarrow \; \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{T_0}{1 + \tau p}$$

Définition : La transmittance d'un système linéaire du 1°ordre est du type

$$\boxed{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{T_0}{1 + \tau p}}$$

- τ est la constante de temps ($s(\tau) = 63\%$ de S_∞)
- T_0 est la transmittance statique ($T_0 = \dfrac{S_\infty}{E_\infty}$ lorsque e(t) est un échelon)



Remarque : Utilisons le théorème de la valeur finale pour montrer que $S_\infty = T_0 E_\infty$.

$$\lim_{t \to \infty} s(t) = \lim_{p \to 0} pS(p) = \lim_{p \to 0} pT(p)E(p) = \lim_{p \to 0} p \frac{T_0}{1 + \tau p} \frac{E}{p}$$

soit $\lim\limits_{t \to \infty} s(t) = S_\infty = T_0 E_\infty$ avec $E_\infty = E$ (échelon d'amplitude E).

4- Système du 2°ordre

Un système du 2°ordre d'entrée **e(t)** et de sortie **s(t)** sera régit par l'équation différentielle du 2°ordre à coefficients constants :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+2m\frac{1}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=T_0e(t)$$

Avec ω_0 pulsation propre, m coefficient d'amortissement et $T_0=\frac{S_\infty}{E_\infty}$ lorsque e(t) est un échelon.

La transformation de Laplace donne :

$$\frac{1}{\omega_0^2}p^2S(p)+2m\frac{1}{\omega_0}pS(p)+S(p)=T_0E(p)$$

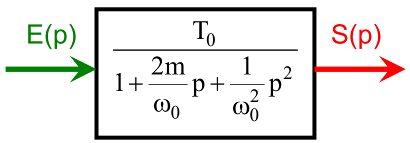
$$\Rightarrow\ S(p)\left(\frac{1}{\omega_0^2}p^2+\frac{2m}{\omega_0}p+1\right)=T_0E(p)$$

$$\Rightarrow\ \frac{S(p)}{E(p)}=\frac{T_0}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}.$$

Définition : La transmittance d'un système linéaire du 2°ordre est du type

$$\boxed{T(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{T_0}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}}$$

- ω_0 est la pulsation propre.
- m est le coefficient d'amortissement (m > 0 pour un système stable).
- T_0 est la transmittance statique ($T_0=\frac{S_\infty}{E_\infty}$ lorsque e(t) est un échelon)



IV- EXEMPLES D'ÉTUDE DE SYSTÈMES

1- Système mécanique du 1° ordre

Considérons le système linéaire constitué d'un parachute avec son chargement. L'entrée du système est la **force de pesanteur P = m.g** exercée par le chargement de masse m. La sortie du système est la **vitesse de chute v** du parachute. Le parachute s'ouvre à l'instant t = 0 du largage (v = 0m/s pour t ≤ 0).

Mise en équation du système :

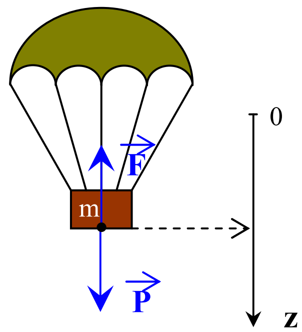
- Force de pesanteur : P = mg (échelon de force : P = 0 pour t ≤ 0)
- Force de frottement : F = -fv (f = coefficient de frottement)

$$\sum \text{Forces}=ma=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\Rightarrow\ P-fv=m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow\ fv+m\frac{dv}{dt}=P$$

$$\Rightarrow\ \boxed{v+\frac{m}{f}\frac{dv}{dt}=\frac{1}{f}P}$$



Transformation de Laplace :

$$V(p)+\frac{m}{f}pV(p)=\frac{1}{f}P(p)$$

$$\Rightarrow\ T(p)=\frac{V(p)}{P(p)}=\frac{1/f}{1+\frac{m}{f}p}\ \Rightarrow\ \boxed{T(p)=\frac{T_0}{1+\tau p}}\ \text{avec}\ \boxed{T_0=\frac{1}{f}}\ \text{et}\ \boxed{\tau=\frac{m}{f}}.$$

Expression de la vitesse v(t) pour P(t) échelon d'amplitude P :

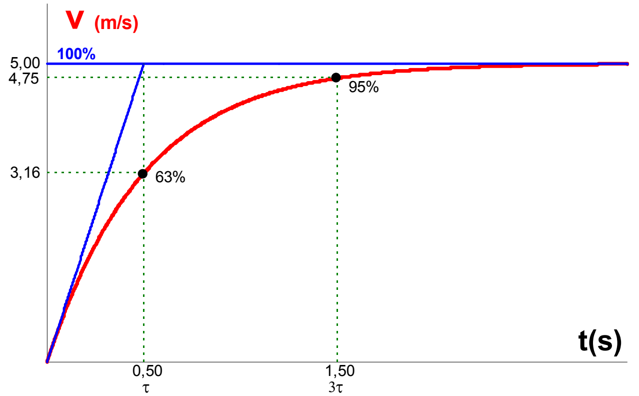
$$V(p)=T(p)P(p)=\frac{T_0}{1+\tau p}\frac{P}{p}=\frac{T_0P}{p(1+\tau p)}$$

$$\Rightarrow\ v(t)=T_0P\left(1-\exp^{-t/\tau}\right)$$

Expression numérique de v(t) pour m = 80kg et f = 160N.m^{-1}.s :

$$v(t)=\frac{1}{160}\times 80\times 10\times\left(1-\exp^{-\frac{t}{80/160}}\right)=5\left(1-\exp^{-\frac{t}{0{,}5}}\right)$$

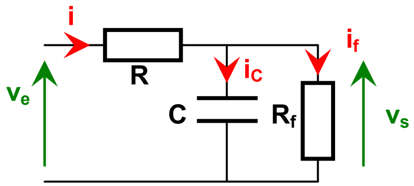
Graphe v(t) :



2- Système électrique du 1° ordre

Considérons le système électrique constitué d'un condensateur C qui doit être chargé à travers une résistance R. Le condensateur a un défaut de fuite (résistance R_f en parallèle).

L'entrée du système est la tension v_e qui sera un échelon d'amplitude E.
La sortie du système est la tension v_s aux bornes du condensateur.



Mise en équation du système :

$$v_e = Ri + v_s$$

$$\Rightarrow\quad v_e = R\left(i_C + i_f\right) + v_s$$

$$\Rightarrow\quad v_e = R\left(C\frac{dv_s}{dt}+\frac{1}{R_f}v_s\right)+v_s \quad\Rightarrow\quad v_e = RC\frac{dv_s}{dt}+\frac{R}{R_f}v_s+v_s$$

$$\Rightarrow\quad v_e = RC\frac{dv_s}{dt}+\frac{R+R_f}{R_f}v_s$$

$$\Rightarrow\quad \frac{R.R_f}{R+R_f}C\frac{dv_s}{dt}+v_s=\frac{R_f}{R+R_f}v_e$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{v_s+\tau\frac{dv_s}{dt}=\frac{R_f}{R+R_f}v_e} \quad \text{avec} \quad \tau=\frac{R.R_f}{R+R_f}.$$

Transformation de Laplace :

$$V_s(p)+\tau p V_s(p)=\frac{R_f}{R+R_f}V_e(p) \quad\Rightarrow\quad V_s(p)\left(1+\tau p\right)=\frac{R_f}{R+R_f}V_e(p)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{T(p)=\frac{V_s(p)}{V_e(p)}=\frac{\frac{R_f}{R+R_f}}{\left(1+\tau p\right)}}$$

Expression de la tension $v_s(t)$ pour $v_e(t)$ échelon d'amplitude E :

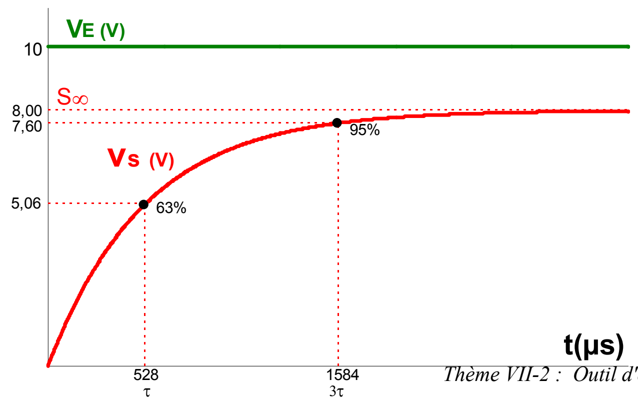
$$V_s(p)=T(p)V_e(p)=\frac{R_f}{R+R_f}\frac{E}{p\left(1+\tau p\right)}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{v_s(t)=E\frac{R_f}{R+R_f}\left(1-\exp^{-t/\tau}\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau=\frac{R.R_f}{R+R_f}C}.$$

Expression numérique de $v_s(t)$ pour C = 220µF ; R_f = 12kΩ ; R = 2kΩ et E = 10V :

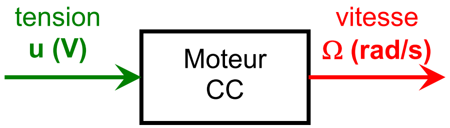
$$v_s(t)=10\frac{12}{3+12}\left(1-\exp^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau=\frac{3\times 12}{3+12}\times 220.10^{-6}=528\mu s$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{v_s(t)=8\left(1-\exp^{-\frac{t}{528.10^{-6}}}\right)}.$$

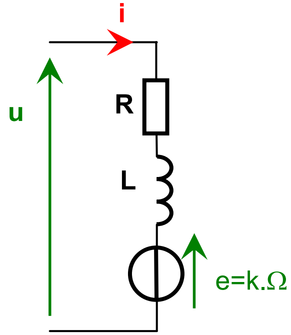


3- Système électromécanique du 2° ordre

Le système à étudier sera le moteur à courant continu à aimant permanent (excitation constante) avec frottements négligés.
L'entrée du système sera la tension d'alimentation **u(t)** (échelon d'amplitude E) et la sortie sera la vitesse de rotation **Ω(t)** du moteur.



Mise en équation du système commandé :



- Equation électrique : $u = e + Ri + L\frac{di}{dt} = k\Omega + Ri + L\frac{di}{dt}$
- Equation électromécanique : $ki = J\frac{d\Omega}{dt} \Rightarrow i = \frac{J}{k}\frac{d\Omega}{dt}$

Transformées de Laplace :

- Equation électrique : $U(p) = k\Omega(p) + RI(p) + LpI(p)$

  $\Rightarrow \quad U(p) = k\Omega(p) + (R + Lp)I(p)$
- Equation électromécanique : $I(p) = \frac{J}{k}p\Omega(p)$
- Equation générale : $U(p) = k\Omega(p) + (R + Lp)\frac{J}{k}p\Omega(p)$

$$\Rightarrow \quad U(p) = k\Omega(p) + \left(\frac{RJ}{k}p + \frac{LJ}{k}p^2\right)\Omega(p)$$

$$\Rightarrow \quad U(p) = \left(k + \frac{RJ}{k}p + \frac{LJ}{k}p^2\right)\Omega(p)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{1}{\left(k + \frac{RJ}{k}p + \frac{LJ}{k}p^2\right)} = \frac{1/k}{\left(1 + \frac{RJ}{k^2}p + \frac{LJ}{k^2}p^2\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{1/k}{\left(1 + \frac{RJ}{k^2}p + \frac{LJ}{k^2}p^2\right)}}$$

Identification :

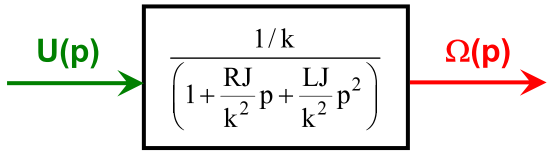
La transmittance est de type $\boxed{T(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{T_0}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}}$

avec : $\boxed{T_0 = \frac{1}{k}}$

$\boxed{\omega_0 = \frac{k}{\sqrt{LJ}}}$ car $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{LJ}{k^2}$

$\boxed{m = \frac{R}{2k}\sqrt{\frac{J}{L}}}$ car $2m\frac{1}{\omega_0} = \frac{RJ}{k^2} \Rightarrow m = \frac{1}{2k}\frac{RJ}{k^2}\frac{k}{\sqrt{LJ}}$.

Ce moteur à courant continu est entièrement caractérisé par le schéma bloc ci-dessous :



V- UTILISATION DES THÉORÈMES

1- Objectif

Il s'agit de déterminer des propriétés du signal de sortie s(t) directement à partir de la transmittance T(p) et de l'entrée E(p).

2- Valeur finale

On va utiliser le théorème de la valeur finale : $\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p)$ pour déterminer la valeur de s(t) au bout d'un temps infini.

■ Exemple de la charge du condensateur avec courant de fuite (entrée échelon)

On a déjà montré que $T(p)=\dfrac{V_s(p)}{V_e(p)}=\dfrac{\frac{R_f}{R+R_f}}{(1+\tau p)}$.

Pour une entrée échelon d'amplitude E on a : $V_s(p)=\dfrac{E}{p}\dfrac{\frac{R_f}{R+R_f}}{(1+\tau p)}$

$$\Rightarrow\ \lim_{t\to\infty}s(t)=\lim_{p\to 0}pS(p)=\lim_{p\to 0}p\frac{E}{p}\frac{\frac{R_f}{R+R_f}}{(1+\tau p)}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\lim_{t\to\infty}s(t)=E\frac{R_f}{R+R_f}}$$ (pont diviseur lorsque C est chargé).

■ Exemple du moteur à courant continu sans frottement (entrée échelon)

On a déjà déterminé : $\boxed{T(p)=\dfrac{\Omega(p)}{U(p)}=\dfrac{1/k}{\left(1+\frac{RJ}{k^2}p+\frac{LJ}{k^2}p^2\right)}}$.

Pour une entrée échelon d'amplitude E on a : $\boxed{\Omega(p)=\dfrac{E}{p}\dfrac{1/k}{\left(1+\frac{RJ}{k^2}p+\frac{LJ}{k^2}p^2\right)}}$

$$\Rightarrow\ \lim_{t\to\infty}\Omega(t)=\lim_{p\to 0}p\Omega(p)=\lim_{p\to 0}p\frac{E}{p}\frac{1/k}{\left(1+\frac{RJ}{k^2}p+\frac{LJ}{k^2}p^2\right)}$$

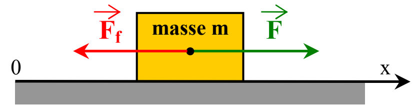
$$\Rightarrow\ \boxed{\lim_{t\to\infty}\Omega(t)=\frac{E}{k}}$$ (c'est le régime permanent E = k.Ω du moteur sans frottement).

3- Valeur initiale

On va utiliser le théorème de la valeur initiale : $\lim_{t\to 0}s(t)=\lim_{p\to\infty}pS(p)$ pour déterminer la valeur de $s(0^+)$.

■ Exemple du mouvement d'une masse m soumise à une force

Le système est constitué d'une masse m pouvant se déplacer horizontalement avec un coefficient de frottement fluide f (Force de frottement $\mathbf{F_f = -fv}$).
L'entrée du système est la force de traction **F** appliquée à la masse et la sortie est la vitesse de déplacement **v**.

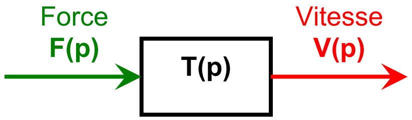


Mise en équation : $\sum \text{Forces} = ma = m\dfrac{dv}{dt}$

$\Rightarrow\quad F - fv = m\dfrac{dv}{dt}$

Transformée de Laplace : $F(p) - fV(p) = mpV(p)$

$\Rightarrow\quad T(p)=\dfrac{V(p)}{F(p)}=\dfrac{1}{f+mp}=\dfrac{1/f}{1+\frac{m}{f}p}$



Evaluons la vitesse à l'instant $t = 0^+$ lorsque F est un échelon d'amplitude F :

$$\lim_{t\to 0}v(t)=\lim_{p\to\infty}pV(p)=\lim_{p\to\infty}p\frac{F}{p}\frac{1/f}{f+mp}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\lim_{t\to 0}v(t)=0}$$

Moralité : La vitesse d'un solide (masse m) **ne peut varier brusquement** de la même façon que le courant électrique dans une bobine ne peut varier brusquement (pas de discontinuité).

VI- MÉTHODE D'ÉTUDE DES SYSTÈMES ELECTRIQUES

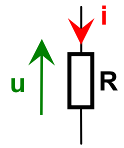
1- Objectif

Il s'agit de déterminer la transmittance d'un système électrique, sans passer par l'équation différentielle.
L'idée est de travailler directement avec le transformées de Laplace des impédances.

2- Impédances isomorphes

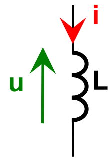
- La résistance
Pour une résistance R en convention récepteur on a :
$\boxed{u = R.i}$

$\Rightarrow U(p) = RI(p) \qquad \Rightarrow \dfrac{U(p)}{I(p)} = R \qquad \Rightarrow \boxed{Z_R(p) = R}.$



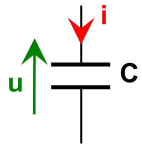
- L'inductance
Pour une inductance L en convention récepteur on a :
$\boxed{u = L\dfrac{di}{dt}}$

$\Rightarrow U(p) = LpI(p) \qquad \Rightarrow \dfrac{U(p)}{I(p)} = Lp \qquad \Rightarrow \boxed{Z_L(p) = Lp}.$



- Le condensateur
Pour un condensateur C en convention récepteur on a :
$\boxed{i = C\dfrac{du}{dt}}$

$\Rightarrow I(p) = CpU(p) \qquad \Rightarrow \dfrac{U(p)}{I(p)} = \dfrac{1}{Cp} \qquad \Rightarrow \boxed{Z_C(p) = \dfrac{1}{Cp}}.$



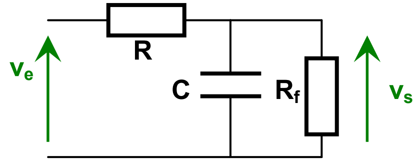
Remarque :

Les impédances complexes déjà utilisées par le passé sont des cas particuliers des impédances isomorphes.
Il suffit de **remplacer p par jω** pour passer des impédances complexes aux impédances isomorphes.
Inversement, il suffit de **remplacer jω par p** pour passer des impédances isomorphes aux impédances complexes.

- $Z_R(p) = R \qquad \Rightarrow \underline{Z}_R(j\omega) = R$
- $Z_L(p) = Lp \qquad \Rightarrow \underline{Z}_L(j\omega) = JL\omega$
- $Z_C(p) = \dfrac{1}{Cp} \qquad \Rightarrow \underline{Z}_C(j\omega) = \dfrac{1}{JC\omega}.$

3- Exemple 1

Reprenons le système de charge d'un condensateur présentant un fort courant de fuite traversant la résistance de fuite R_f.



L'entrée du système est la tension v_e qui sera un échelon d'amplitude E.
La sortie du système est la tension v_s aux bornes du condensateur.

Détermination directe de T(p) :

Utilisons la relation du pont diviseur :

$$T(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{Z_{R_f//C}}{Z_{R_f//C} + Z_R} \qquad \textit{multiplions par } Y_{Rf//C}$$

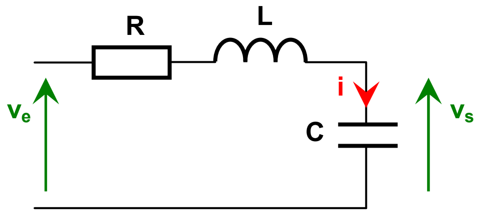
$$\Rightarrow T(p) = \frac{1}{1 + Y_{R_f//C} \times Z_R} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{R_f} + Cp\right)R} = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{R_f} + RCp}$$

$$\Rightarrow T(p) = \frac{1}{\dfrac{R+R_f}{R_f} + RCp} = \frac{\dfrac{R_f}{R+R_f}}{1 + \dfrac{RR_f}{R+R_f}p}$$

On reconnaît alors $T_0 = \dfrac{R_f}{R+R_f}$ et $\tau = \dfrac{R.R_f}{R+R_f}$

4- Exemple 2

Soit le système représentant un filtre passe-bas du 2°ordre dont on veut déterminer la transmittance $T(p)=\dfrac{V_s(p)}{V_e(p)}$ (schéma ci-dessous) :



Détermination directe de T(p) :

Utilisons la relation du pont diviseur :

$$T(p)=\frac{V_s(p)}{V_e(p)}=\frac{Z_C}{Z_C+Z_R+Z_L} \qquad \textit{multiplions par } Y_C$$

$$\Rightarrow\ T(p)=\frac{1}{1+Y_C\left(Z_R+Z_L\right)}=\frac{1}{1+Cp\left(R+Lp\right)}=\frac{1}{1+RCp+LCp^2}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{T(p)=\frac{T_0}{1+\dfrac{2m}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2}} \quad \text{avec } \boxed{T_0=1}\ ;\ \boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}} \text{ et } \boxed{m=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}}.$$