# Cours Thème VII
# "Systèmes linéaires"

## 1. Formalisme et identification d'un système analogique

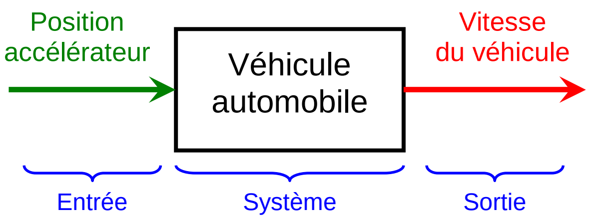
## OBJECTIFS

- Donner les définitions de base relatives aux systèmes linéaires.
- Appliquer les lois de la Physique pour établir la relation "entrée-sortie" d'un système.
- Savoir déterminer les paramètres (identification) d'un système dont le modèle est donné (1°ordre ou 2° ordre).

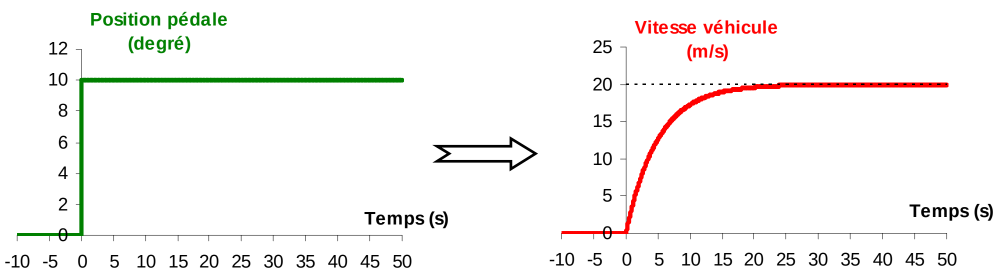
## I- INTRODUCTION (étude d'exemples)

### 1- Exemple 1

Considérons le système constitué d'une automobile :
- l'entrée du système sera la position angulaire (en degré) de la pédale d'accélérateur,
- la sortie du système sera la vitesse du véhicule (en km/h).



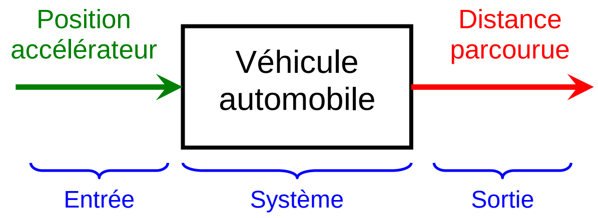

Observons l'évolution de la vitesse (sortie du système) lorsque le conducteur actionne brutalement la pédale d'accélérateur de 10° (entrée du système) :



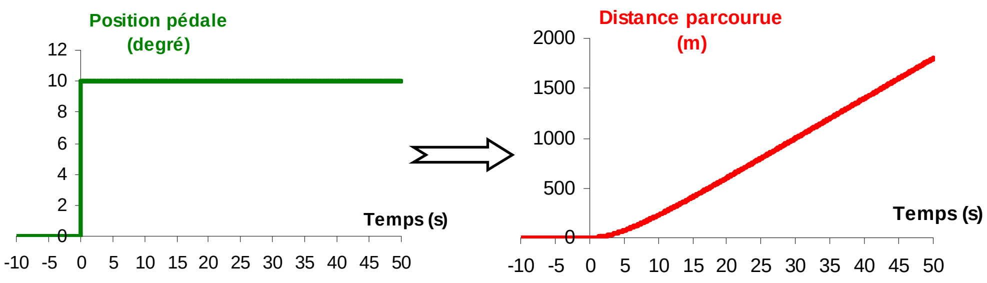

Observations :
- la sortie du système ne commence à évoluer que lorsque l'entrée est "active",
- de 0 à 20s la sortie évolue, c'est le **régime transitoire**,
- à partir de 20s la sortie évolue peu, c'est le **régime permanent** entretenu par l'entrée.

### 2- Exemple 2

Considérons toujours le système constitué d'une automobile :
- l'entrée du système sera la position angulaire, en degré, de la pédale d'accélérateur,
- la sortie du système est maintenant la distance parcourue par le véhicule.




Observons l'évolution de la distance parcourue (sortie du système) lorsque le conducteur actionne brutalement la pédale d'accélérateur de 10° (entrée du système) :




Observations :
- comme pour l'exemple 1, la sortie du système ne commence à évoluer que lorsque l'entrée est "active",
- de 0 à 10s la pente de la sortie évolue, c'est le **régime transitoire**,
- à partir de 10s la pente de la sortie évolue peu, c'est le **régime permanent** entretenu par l'entrée.

Premières conclusions :
- Un même système peut être étudié de différentes façons suivant le choix des grandeurs d'entrée et de sortie.
- L'étude d'un système ne passe pas forcément par l'analyse de sa constitution interne, il est souvent considéré comme une "boite noire".

# II- DÉFINITIONS

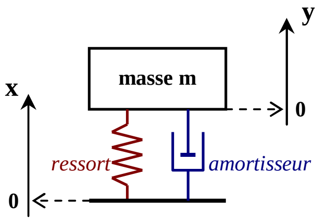
## 1- Régime transitoire - Régime permanent

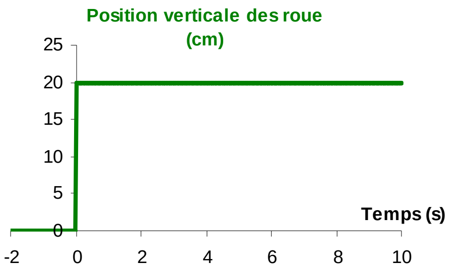
Dans tout ce chapitre, on considère que le système est excité (entrée active) à partir de l'instant t = 0 (système causal).
L'évolution de la sortie se fait **par superposition** de deux régimes :

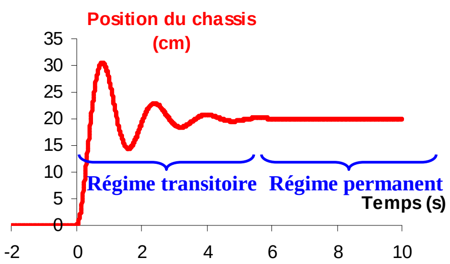
- Un régime transitoire souvent provoqué par l'inertie du système.
- Un régime permanent ou régime forcé **entretenu par l'entrée** et présentant des caractéristiques n'évoluant presque plus.

Exemples :

■ Ressort + amortisseur d'un véhicule ( x : position des roues et y : position de châssis )



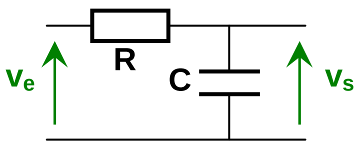



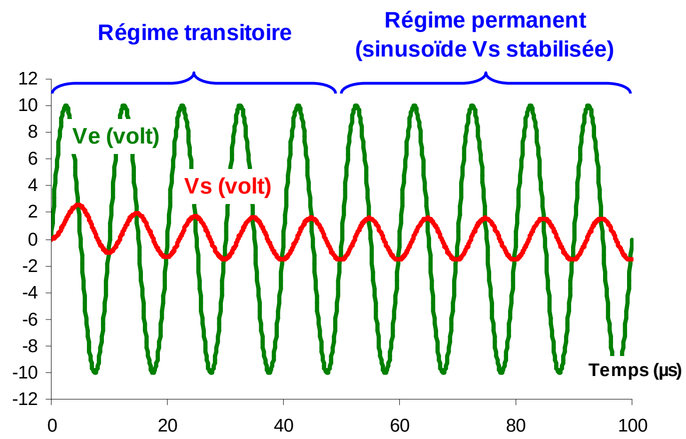

Dans cet exemple, le régime transitoire est de type **"oscillant amorti"** alors que le régime permanent est de type **"continu ou constant"**.
Remarque : le régime permanent est imposé par l'entrée (20cm).

■ Circuit en régime sinusoïdal

Considérons le circuit "RC série" très utilisé dans le filtrage passe-bas.




Soumettons le circuit à une tension sinusoïdale d'amplitude et de fréquence constantes.

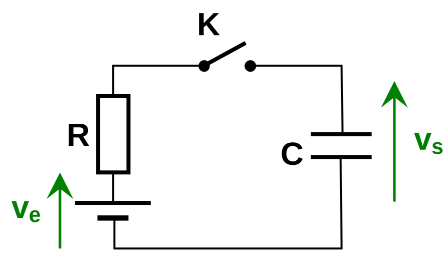



Dans cet exemple, le régime transitoire est de type **"sinusoïdal non établi"** alors que le régime permanent est de type **"sinusoïdal d'amplitude et fréquence constantes"**.

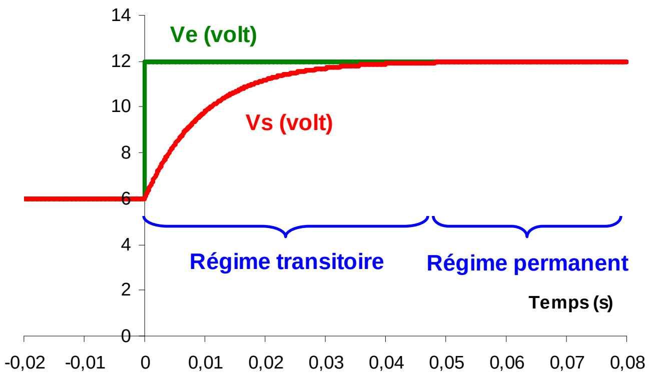
Remarque : la forme du signal en régime permanent est imposée par l'entrée (sinusoïde). C'est le cas du régime sinusoïdal forcé qui a été étudié dans les classes antérieures (filtrage analogique par exemple).

■ Charge d'un condensateur

Considérons un dispositif de recharge d'un condensateur lorsque celui-ci a perdu la moitié de sa charge :

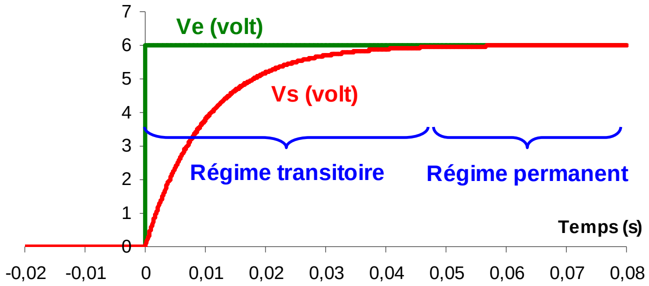



A l'instant t = 0, l'interrupteur K se ferme (voir chronogrammes page suivante).




Dans cet exemple, le régime transitoire est de type **"réponse 1° ordre"** alors que le régime permanent est de type **"continu ou constant"**.

Remarque : Le condensateur est déjà chargé à t < 0. On peut **simplifier l'étude** en considérant le condensateur déchargé avec une tension $v_e$ qui passe de 0 à 6V (chronogramme ci-dessous):

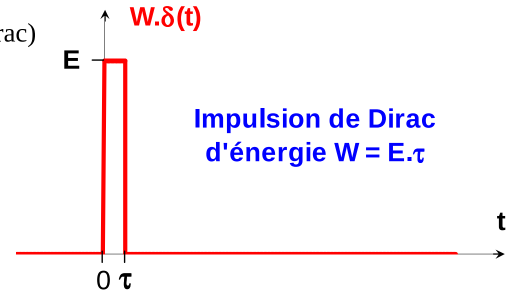



## 2- Types d'excitations (entrée du système)

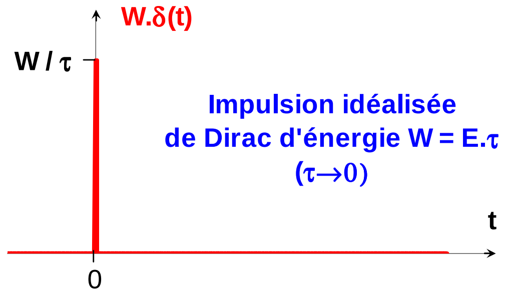
Le signal d'entrée (excitation) d'un système peut prendre plusieurs formes. Nous retiendrons trois familles pour ce signal d'entrée.

- Signal de type impulsion **W.δ(t)** (Dirac)

  Ce signal a la forme d'une impulsion d'amplitude E et de durée τ :




On peut définir l'énergie W de l'impulsion en posant W = E.τ .
En faisant tendre τ vers 0, on tend vers l'impulsion "idéalisée" d'énergie W et d'amplitude $E = \dfrac{W}{\tau}$ (chronogramme ci-dessous) :

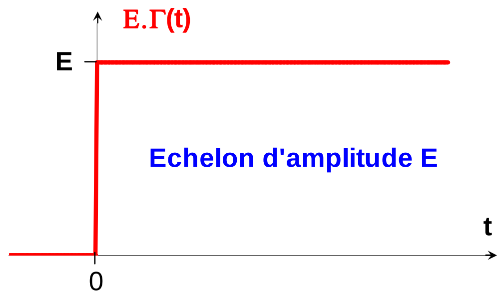



***Remarques*** *: L'impulsion d'énergie 1 sera notée δ(t).*
*Aucune théorie Mathématique sur l'impulsion de Dirac ne sera développée dans ce cours.*

- Signal de type "échelon" **E.Γ(t)**

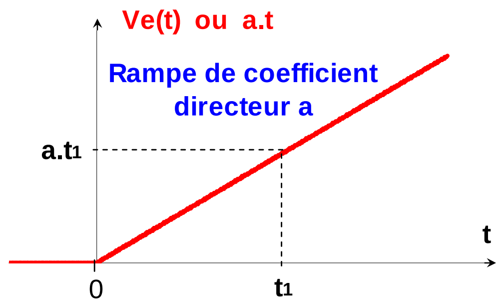
  Ce signal impose, à partir de t = 0, une grandeur **E constante** :

  ***Remarque*** *: L'échelon d'amplitude 1 sera noté Γ(t)*




- Signal de type "rampe" **a.t**

  Ce signal impose, à partir de t = 0, une grandeur croissante de coefficient directeur **a** :



## 3- Système du 1° ordre

### a- Définition

Un système du 1°ordre d'entrée **e(t)** et de sortie **s(t)** sera régit par une équation différentielle du 1° ordre à coefficients constants :

$$\boxed{\tau\dot{s}(t) + s(t) = f(t)}$$

**f(t)** est proportionnel au signal d'entrée (impulsion ,échelon ...) et $\boldsymbol{\tau}$ est une constante qui caractérise le système (constante de temps)

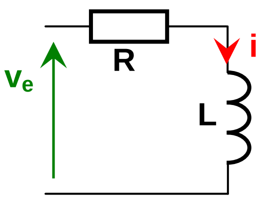
*On rappelle que* $\dot{s}(t)$ *est la notation simplifiée de* s' *ou* $\frac{ds}{dt}$.

La solution générale de l'équation est : $\boxed{s(t) = A + B.e^{-t/\tau}}$

*Les constantes* A *et* B *seront déterminées en considérant* s(0) *et* s(∞).

### b- Exemple d'un système électrique

Soit le système constitué de la partie électrique simplifiée d'un enroulement de moteur pas-à-pas (schéma ci-dessous) :




L'entrée du système sera la tension $\mathbf{v_e}$ d'alimentation du moteur (échelon $\mathbf{E.\Gamma(t)}$ d'amplitude **E**) et la sortie du système sera le courant **i** traversant le circuit (on rappelle que le moteur ne tourne que si le courant est suffisant).

Mise en équation du système commandé :

$$v_e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Soit en notation simplifiée : $v_e(t) = Ri(t) + L\dot{i}(t)$

$$\Rightarrow \frac{L}{R}\dot{i}(t) + i(t) = \frac{v_e(t)}{R} = \frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow \tau.\dot{i}(t) + i(t) = \frac{E}{R}.$$

Résolution de l'équation :

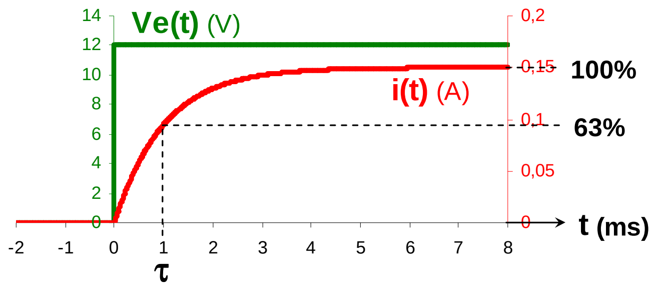
$$i(t) = A + B.e^{-t/\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

Détermination de A et B : i(0) = 0 ⇒ 0 = A + B
i(∞) = E/R ⇒ E/R = A + 0
Bilan : A = E/R et B=-E/R

Solution : $\boxed{i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-t/\tau} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

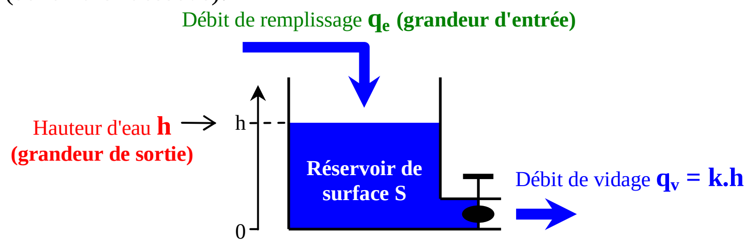
Remarque : $-\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$ représente le régime transitoire et $\frac{E}{R}$ le régime permanent.

Le chronogramme ci-dessous représente $v_e(t)$ et i(t) pour E = 12V, R = 80Ω et L = 80mH ( τ=L/R=1ms ) :




### b- Exemple d'un système hydraulique

Soit le système constitué d'un réservoir d'eau (vide à l'instant t=0) avec remplissage et vidage (schéma ci-dessous):




Phrases "clé" : *Le débit de vidage est proportionnel à la hauteur :* $q_v = k.h$
*Le débit* ($q_e$ - $q_v$) *est responsable de la variation dV/dt du volume V=S.h*

$q_e$ est un échelon d'amplitude $Q_e$ (débit constant $Q_e$ à partir de t = 0)

Mise en équation du système commandé :

$$q_e - q_v = \frac{dv}{dt} \quad \text{avec } q_e = Q_e \text{ (constant)} \; ; \; q_v = k.h \text{ (k = constante)} \quad \text{et} \quad v = S.h$$

$$\Rightarrow Q_e - k.h = S\frac{dh}{dt}$$ ($q_e$ est la grandeur d'entrée et h la grandeur de sortie)

$$\Rightarrow S\frac{dh}{dt} + k.h = Q_e$$

$$\Rightarrow \frac{S}{k}\frac{dh}{dt} + h = \frac{Q_e}{k} \quad \text{ou} \quad \boxed{\tau\dot{h} + h = \frac{Q_e}{k}} \quad \text{avec } \tau = \frac{S}{k} \text{ constante de temps.}$$

Résolution de l'équation :

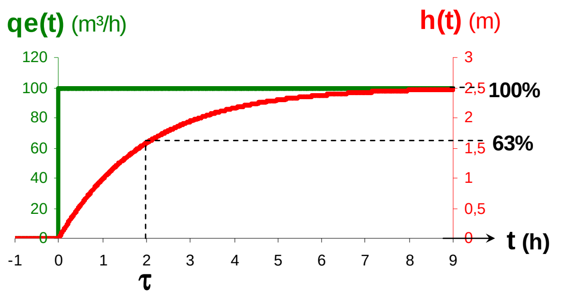
$$h(t) = A + B.e^{-t/\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{S}{k}.$$

Détermination de A et B : $h(0) = 0 \Rightarrow 0 = A + B$
$h(\infty) = Q_e/k \Rightarrow Q_e/k = A + 0$
Bilan : $A = Q_e/k$ et $B = -Q_e/k$

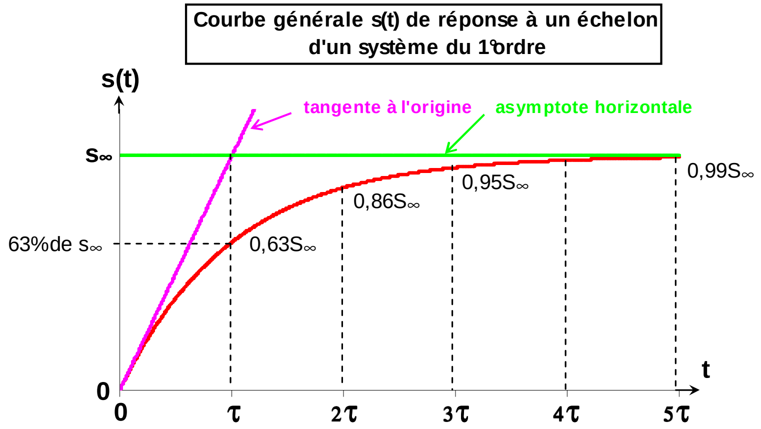
Solution : $\boxed{h(t) = \frac{Q_e}{k} - \frac{Q_e}{k}e^{-t/\tau} = \frac{Q_e}{k}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

Remarque : $-\frac{Q_e}{k}e^{-t/\tau}$ représente le régime transitoire et $\frac{Q_e}{k}$ le régime permanent.

Le chronogramme ci-dessous représente $q_e(t)$ et $h(t)$ pour $Q_e = 100 m^3/h$ , $S = 80 m^2$ et $k = 40 m^2/h$ ( $\tau = S/k = 2h$) :




c- Propriétés de la courbe de réponse à un échelon (1° ordre)




La courbe s(t) possède **les propriétés importantes** ci-dessous :

① L'asymptote horizontale a pour ordonnée $S_\infty = \lim_{t \to +\infty} s(t)$ .

② L'asymptote horizontale coupe la tangente à l'origine à l'instant $t = \tau$ .

③ A l'instant $t = \tau$ , s(t) atteint 63% de sa valeur finale $S_\infty$ ( $s(\tau) = 0,63\, S_\infty$ ).

④ Aux instants $t = 2\tau$ , $3\tau$ et $5\tau$ la sortie s(t) atteint 86% , 95% et 98% de $S_\infty$.

D'autres propriétés, moins utilisées sont indiquées ci-dessous :

⑤ Le temps pour passer de 0 à 1/3 de $S_\infty$ est : $t = \tau \ln(3/2) \approx 0,405\tau$ .

⑥ Le temps pour passer de 0 à 2/3 de $S_\infty$ est : $t = \tau \ln 3 \approx 1,10\tau$ .

⑦ Le temps pour passer de 1/3 à 2/3 de $S_\infty$ est : $t = \tau \ln 2 \approx 0,693\tau$ .

⑧ Le temps pour passer de 0 à 1/2 de $S_\infty$ est : $t = \tau \ln 2 \approx 0,693\tau$ .

## 4- Système du 2° ordre

a- Définition (limitée au cas de la réponse à un échelon)

Un système du 2°ordre d'entrée **e(t)** et de sortie **s(t)** sera régit par une équation différentielle du 2°ordre à coefficients constants :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{s}(t)+2m\frac{1}{\omega_0}\dot{s}(t)+s(t)=f(t)}$$

- **f(t)** est proportionnel au signal d'entrée **e(t)** et on aura **f(t) = s(∞)** si le système est stable (plus de variations lorsque $t\to+\infty$).
- $\boldsymbol{\omega_0}$ est une constante qui caractérise la pulsation d'oscillation propre du système (pulsation propre).
- **m** est une constante qui caractérise l'amortissement du système (coefficient d'amortissement **m > 0** ).

*On rappelle que* $\dot{s}(t)$ *est la notation simplifiée de* s' *ou* $\frac{ds}{dt}$ *et que* $\ddot{s}(t)$ *est la notation simplifiée de* s'' *ou* $\frac{d^2s}{dt^2}$.

La solution générale de l'équation dépend de la valeur de m.

*Dans le cadre de BTS IRIS, les expressions solutions de l'équation différentielle du 2° ordre sont données à titre d'information, par contre* ***les solutions graphiques sont à connaître****.*

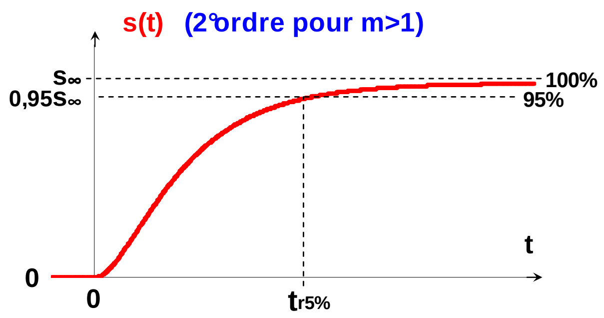
- m > 1 (réponse non oscillante)

La solution est : $\boxed{s(t)=s(\infty)+A_1e^{a_1.t}+A_2e^{a_2.t}}$

avec
$$a_1=-m\omega_0+\omega_0\sqrt{m^2-1}$$
$$a_2=-m\omega_0-\omega_0\sqrt{m^2-1}$$
$$A_1=\frac{-a_2E}{a_2-a_1}$$
$$A_2=\frac{-a_1E}{a_1-a_2}$$

***Pour information***

Le graphe ci-dessous illustre s(t) pour m>1 :



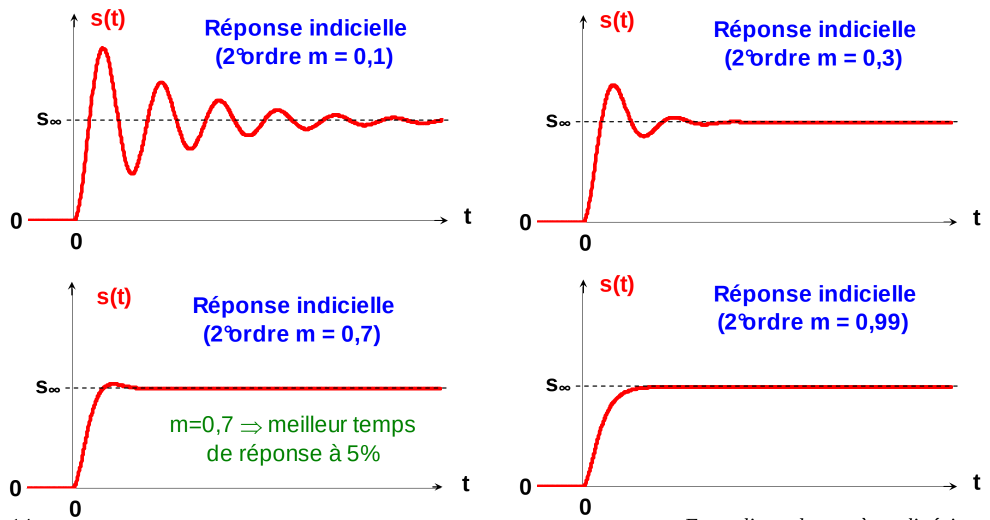

- m < 1 (réponse oscillante amortie)

La solution est : $\boxed{s(t)=s(\infty)+A_0e^{-m\omega_0.t}\cos(\omega t+\varphi)}$

avec
$$\omega=\omega_0\sqrt{1-m^2}\ \text{(pseudo-pulsation)}$$
$$\varphi=\tan^{-1}\left(-\frac{m\omega_0}{\omega}\right)$$
$$A_0=\frac{-E}{\cos\varphi}$$

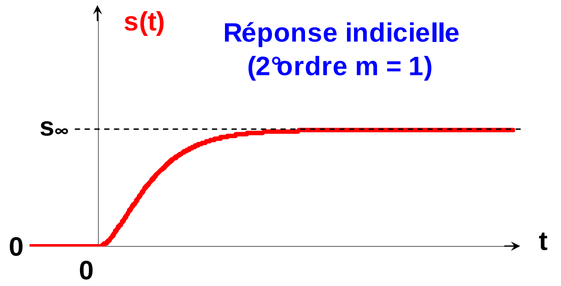
***Pour information***

Le graphe ci-dessous illustre s(t) pour quelques valeurs de m (m < 1) :



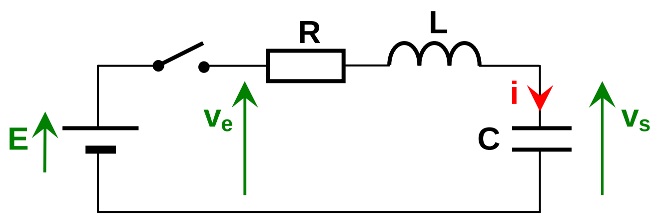
- $m = 1$ (régime intermédiaire)

  La solution est : $s(t) = s(\infty)\left[1-(1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 . t}\right]$ $\Big\}$ ***Pour information***




b- <u>Exemple d'un système électrique</u>

Soit le circuit réalisant un filtre passe-bas du 2°ordre dont on veut étudier la réponse indicielle (schéma ci-dessous) :




On ferme l'interrupteur K à l'instant t = 0; $\mathbf{v_e(t)}$ sera donc un échelon $\mathbf{E.\Gamma(t)}$ d'amplitude **E**.
La sortie du système sera la tension $\mathbf{v_s}$ aux bornes du condensateur C (tension de sortie du filtre).

<u>Mise en équation du système commandé</u> :

$$v_e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_s(t) \quad \text{avec} \quad v_e(t) = E \quad \text{et} \quad i = C\frac{dv_s(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad E = RC\frac{dv_s(t)}{dt} + LC\frac{d^2v_s(t)}{dt^2} + v_s(t)$$

Soit en notation simplifiée : $\boxed{LC\ddot{v}_s + RC\dot{v}_s + v_s = E}$

L'équation est conforme à celle de la définition : $\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{s}(t) + 2m\frac{1}{\omega_0}\dot{s}(t) + s(t) = f(t)$

<u>On a donc par identification</u> : $\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{v}_s(t) + 2m\frac{1}{\omega_0}\dot{v}_s(t) + v_s(t) = E$

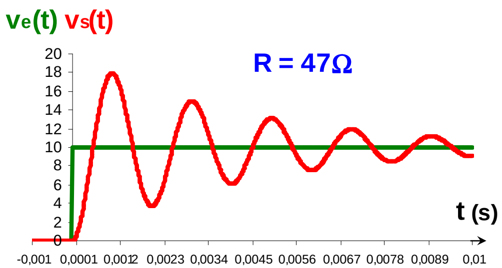
$$\boxed{s(\infty) = f(t) = E}$$

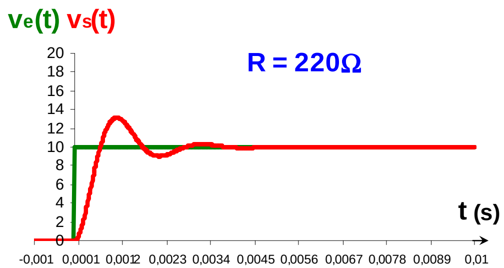
$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{car} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = LC$$

$$\boxed{m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}} \quad \text{car} \quad 2m\frac{1}{\omega_0} = RC \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2}RC\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Le graphe ci-dessous illustre la réponse indicielle du filtre avec les données suivantes :

$E = 10V$ ; $L = 0{,}1H$ ; $C = 1\mu F$ et $R = 47\Omega$ puis $220\Omega$.

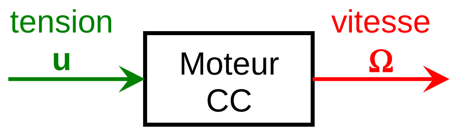


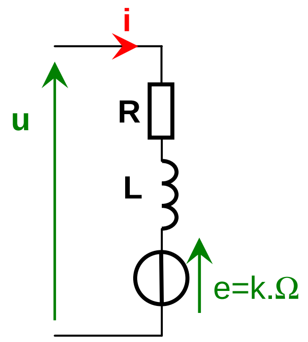

On constate que la résistance agit sur le coefficient d'amortissement m (plus R est élevée, plus l'amortissement est important); il suffit d'observer la relation donnant m en fonction de R,L et C.

c- <u>Exemple d'un système électromécanique (moteur à courant continu)</u>

Le système à étudier sera le moteur à courant continu à aimant permanent (excitation constante) avec frottements négligés.
L'entrée du système sera la tension d'alimentation **u(t)** (échelon d'amplitude E) et la sortie sera la vitesse de rotation **Ω(t)** du moteur.



Mise en équation du système commandé :




- Equation électrique : $\boxed{u = e + Ri + L\dfrac{di}{dt}}$
- Equation électromécanique (vitesse Ω et couple T) :

$$\boxed{e = k.\Omega} \text{ et } \boxed{T = k.i} \Rightarrow u = k.\Omega + Ri + L\frac{di}{dt}$$

- Equation mécanique (moment d'inertie J):

$$\boxed{T = J\frac{d\Omega}{dt}} \Rightarrow i = \frac{J}{k}\frac{d\Omega}{dt}$$

Bilan : $u = k.\Omega + \dfrac{RJ}{k}\dfrac{d\Omega}{dt} + \dfrac{LJ}{k}\dfrac{d^2\Omega}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\dfrac{LJ}{k^2}\dfrac{d^2\Omega}{dt^2} + \dfrac{RJ}{k^2}\dfrac{d\Omega}{dt} + \Omega = \dfrac{E}{k}}$

→ on rappelle que u(t)=E (échelon)

L'équation est conforme à celle de la définition : $\dfrac{1}{\omega_0^2}\ddot{s}(t) + 2m\dfrac{1}{\omega_0}\dot{s}(t) + s(t) = f(t)$

On a donc par identification : $\dfrac{1}{\omega_0^2}\ddot{\Omega}(t) + 2m\dfrac{1}{\omega_0}\dot{\Omega}(t) + \Omega(t) = \dfrac{E}{k}$

$$\boxed{\Omega(\infty) = f(t) = \frac{E}{k}}$$

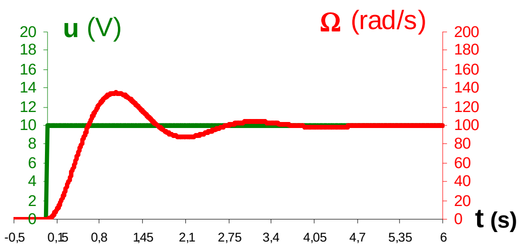
$$\boxed{\omega_0 = \frac{k}{\sqrt{LJ}}} \qquad \text{car } \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{LJ}{k^2}$$

$$\boxed{m = \frac{R}{2k}\sqrt{\frac{J}{L}}} \qquad \text{car } 2m\frac{1}{\omega_0} = \frac{RJ}{k^2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}\frac{RJ}{k^2}\frac{k}{\sqrt{LJ}}.$$

Le graphe ci-dessous illustre la réponse indicielle du moteur :

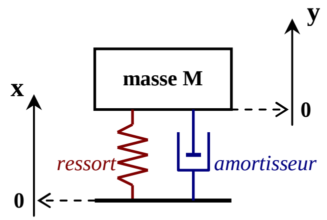
Données :

E = 10V
R = 2Ω
L = 1H
$J = 1.10^{-3}\ m^2.kg$
$k = 0{,}1 V.rad^{-1}.s$




d- Exemple d'un système mécanique (ressort + amortisseur de véhicule))

Le système est ici constitué d'un ressort et d'un amortisseur reliant la roue au châssis d'un véhicule.
La position des roues (entrée du système) sera repérée sur l'axe 0x et la position du châssis (sortie du système) sur l'axe Oy (voir schéma ci-dessous) :




Mise en équation du système commandé :

- Relation fondamentale de la mécanique : $\boxed{\sum Forces = M.a = M\dfrac{dv}{dt} = M\dfrac{d^2y}{dt^2}}$

avec : $F_{ressort} = k(x - y)$ (k : constante de raideur du ressort)

$F_{amortisseur} = f.v = f(\dot{x} - \dot{y})$

L'entrée est un échelon de position d'amplitude H (franchissement d'un trottoir de hauteur H par exemple). On a donc x(t)=H et $\dot{x}(t) = 0$.

Bilan : $k(x - y) - f\dot{y} = M\ddot{y} \Rightarrow \boxed{\dfrac{M}{k}\ddot{y} + \dfrac{f}{k}\dot{y} + y = H}$ car x(t) = H (échelon).

L'équation est conforme à celle de la définition : $\dfrac{1}{\omega_0^2}\ddot{s}(t) + 2m\dfrac{1}{\omega_0}\dot{s}(t) + s(t) = f(t)$

On a donc par identification : $\dfrac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t) + 2m\dfrac{1}{\omega_0}\dot{y}(t) + y(t) = H$

$$\boxed{y(\infty) = f(t) = H}$$

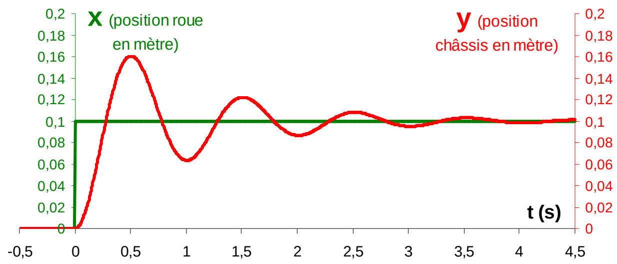
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}} \qquad \text{car } \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{M}{k}$$

$$\boxed{m = \frac{f}{2}\sqrt{\frac{1}{kM}}} \qquad \text{car } 2m\frac{1}{\omega_0} = \frac{f}{k} \Rightarrow m = \frac{f}{2}\frac{1}{k}\sqrt{\frac{k}{M}}.$$

Le graphe ci-dessous illustre la réponse indicielle du système :

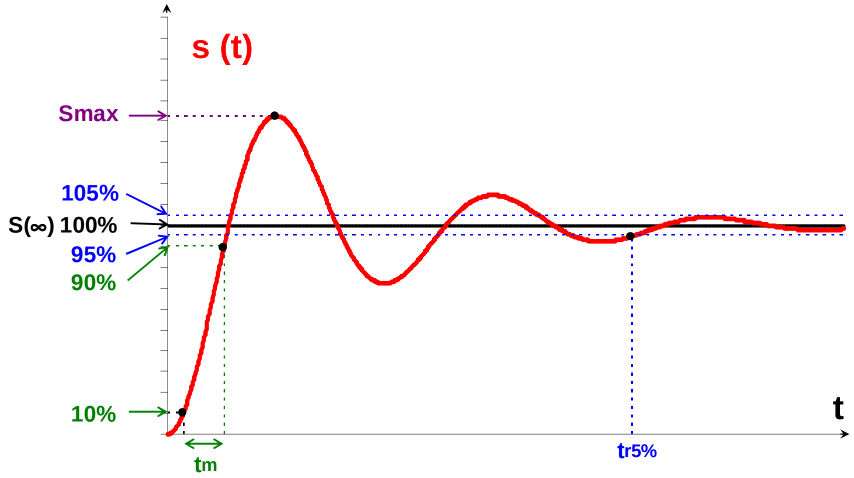
Données :

H = 20cm
M = 250kg
k = $10.10^3$N.$m^{-1}$
f = 500N.$m^{-2}$.s




e- Propriétés de la courbe de réponse à un échelon (2° ordre avec m < 1)

Le graphe ci-dessous représente la réponse à un échelon d'un système du 2° ordre avec m < 1.



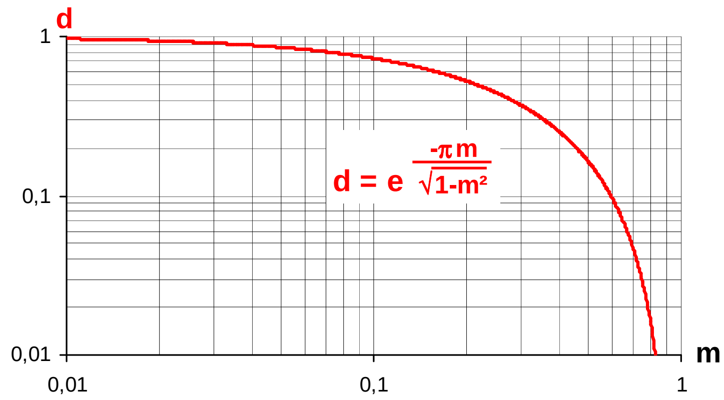

Propriétés de la courbe :

① Dépassement :

Le maximum de la courbe $\mathbf{S_{max}}$ permet de définir le dépassement : $\boxed{d = \frac{S_{max} - S_\infty}{S_\infty}}$

Le dépassement **d** ne dépend que de la valeur de **m** et vaut : $\boxed{d = e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}}$

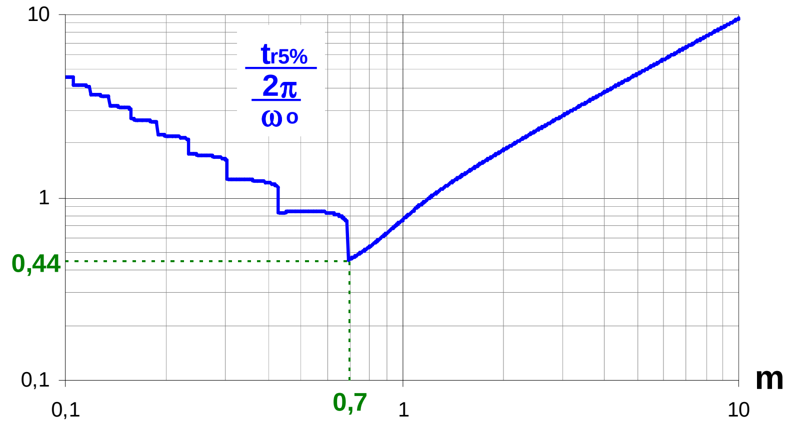
L'abaque ci-dessous représente les variations du dépassement **d** en fonction de l'amortissement **m** (les deux axes sont en coordonnées logarithmiques):




② Temps de réponse 5% :

Le temps de réponse à 5% $\mathbf{t_{r5\%}}$ est le temps au bout duquel la grandeur de sortie **s(t)** reste comprise entre **95%** et **105%** de sa valeur finale $\mathbf{S_\infty}$.

$\mathbf{t_{r5\%}}$ dépend de **m** et de $\boldsymbol{\omega_0}$ ; il n'existe pas de relation simple comme dans le cas du dépassement.
L'abaque ci-dessous permet de trouver une valeur approchée de $\mathbf{t_{r5\%}}$ (attention, il faut multiplier la valeur trouvée en ordonnée par $2\pi/\omega_0$ pour avoir $\mathbf{t_{r5\%}}$) :




On constate sur le graphe que $\mathbf{t_{r5\%}}$ est minimal pour **m = 0,7** et sa valeur est

$$\boxed{t_{r5\%\,min} = 0{,}44\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

③ <u>Temps de montée</u> :

Le temps de montée $\mathbf{t_m}$ est le temps que met la grandeur de sortie **s(t)** pour passer de **10%** à **90%** de la valeur finale $\mathbf{S_\infty}$.

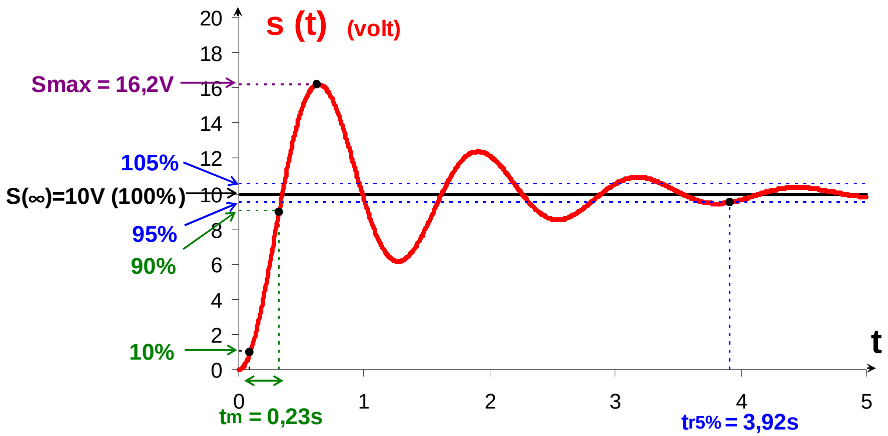
$\mathbf{t_m}$ se mesure directement sur la courbe **s(t)**.

Le temps de montée caractérise la vitesse de variation de la grandeur de sortie dès le début de l'excitation (échelon en entrée).

**<u>Etude d'un exemple</u>** (2°ordre avec $\boldsymbol{\omega_0}$ **= 5rad/s** ; **m = 0,15** et **échelon** d'entrée de **10V**):

■ Recherche de **d** ; $\mathbf{t_{r5\%}}$ et $\mathbf{t_m}$ à partir de la courbe **s(t)**.

Déterminons **d** ; $\mathbf{t_{r5\%}}$ et $\mathbf{t_m}$ à partir de la courbe **s(t)** (tension en volt) ci-dessous :



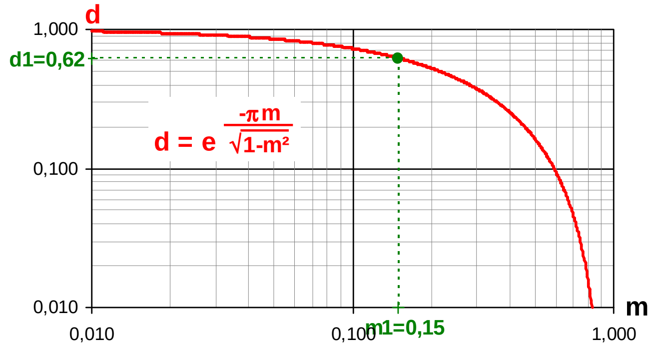

$$S_{max} = 16{,}2 \Rightarrow d = \frac{S_{max} - S_\infty}{S\infty} = \frac{16{,}2-10}{10} \Rightarrow \mathbf{d \approx 0{,}62} \text{ ou } \mathbf{62\%}.$$

La tension reste entre 9,5V et 10,5V à partir de t = 3,92s $\Rightarrow$ $\mathbf{t_{r5\%} \approx 3{,}92s}$.

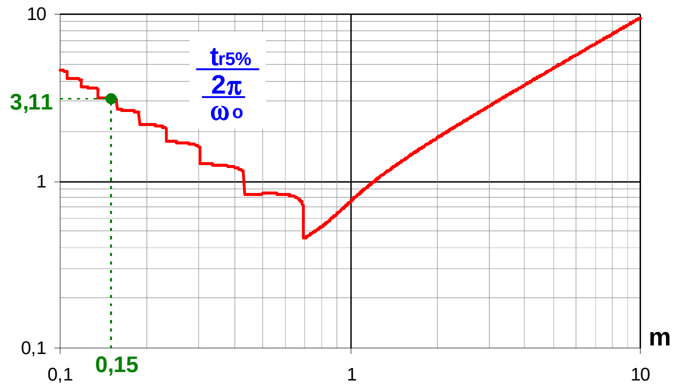
La tension atteint 1V (10%) à $t_1$ = 0,095s et atteint 9V (90%) à $t_2$ = 0,325s
$\Rightarrow$ $t_m = t_2 - t_1$ = 0,325-0,095 $\Rightarrow$ $\mathbf{t_m \approx 0{,}23s}$.

■ Recherche de **d** et $\mathbf{t_{r5\%}}$ à partir des abaques lorsque m et $\omega_0$ sont donnés.

Sachant que **m = 0,15** , on trouve directement **d = 0,62 ou 62%** à partir de l'abaque ci-dessous :




Sachant que **m = 0,15** et $\boldsymbol{\omega_0}$ **= 5rad/s**, on trouve d'abord la valeur $\frac{t_{r5\%}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} \approx 3{,}11$ (abaque ci-dessous):




Pour finir, $t_{r5\%} = 3{,}11\frac{2\pi}{5}$ $\mathbf{\approx 3{,}91s}$.

# III- IDENTIFICATION D'UN SYSTÈME

## 1- Définition

L'identification d'un système consiste, à partir de l'observation de la sortie, à trouver une valeur approchée de ses paramètres alors que le modèle est connu.

- Pour un "1° ordre", l'identification donnera $\tau$ (constante de temps) et $S_\infty$ (valeur finale).
- Pour un "2° ordre", l'identification donnera m (amortissement) ; $\omega_0$ (pulsation propre) et $S_\infty$ (valeur finale).

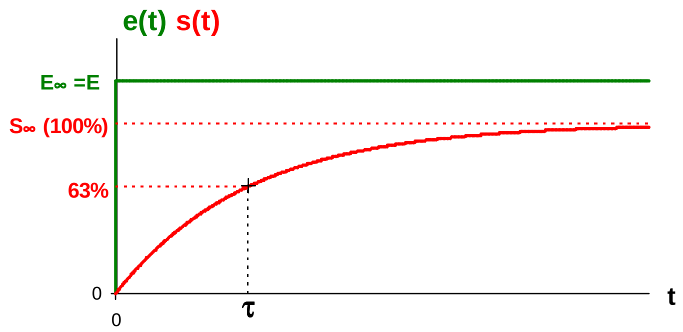
Remarque : Dans de nombreux cas, on a $S_\infty = E_\infty$ (la sortie rejoint l'entrée lorsque $t \to +\infty$).

*Dans ce cours, on se limitera à une identification par réponse indicielle.*

## 2- Système du 1° ordre (méthode)

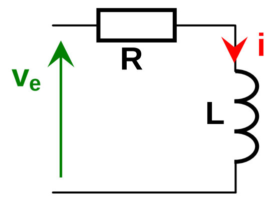
① Pour évaluer $\tau$, une méthode simple consiste à utiliser la propriété : $s(\tau) = 0{,}63 S_\infty$ (on repère 63% de la valeur finale $S_\infty$ en ordonnée et on a $\tau$ en abscisse).

② Pour évaluer $S_\infty$, on trace l'asymptote horizontale et on repère son ordonnée.




## 3- Système électrique du 1° ordre (exemple )

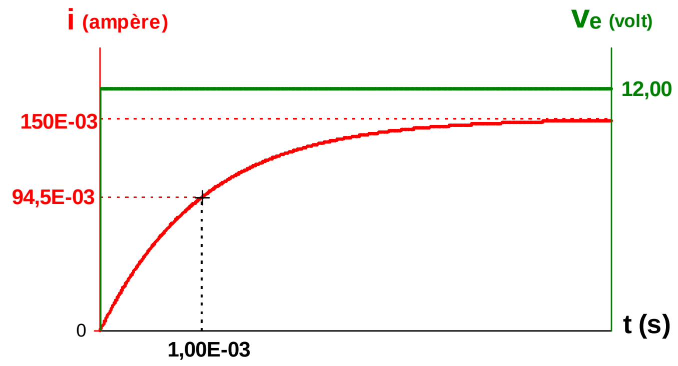
Reprenons le système constitué de la partie électrique simplifiée d'un enroulement de moteur pas-à-pas (schéma ci-dessous) :




L'entrée du système sera la tension $\mathbf{v_e}$ d'alimentation du moteur (échelon $\mathbf{E.\Gamma(t)}$ d'amplitude **E**) et la sortie du système sera le courant **i** traversant le circuit (on rappelle que le moteur ne tourne que si le courant est suffisant).

On a montré que : $\boxed{i(t) = I_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$

Identifions le système (détermination de R et L) en exploitant la courbe de réponse indicielle (e(t) = E = 12V).

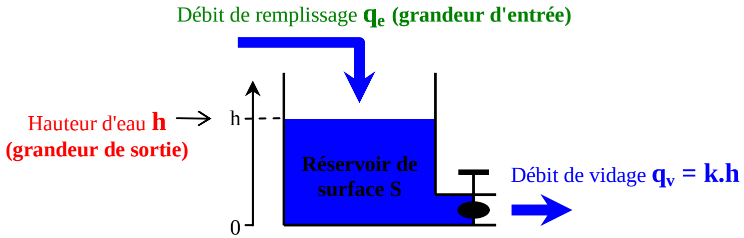



On trouve : $I_\infty = \frac{E}{R} = \frac{12}{R} = 150.10^{-3}\,A \Rightarrow \boxed{R = \frac{12}{150.10^{-3}} = 80\Omega}$.

$\tau = \frac{L}{R} = \frac{L}{80} = 1.10^{-3}\,s \Rightarrow \boxed{L = 1.10^{-3} \times 80 = 80mH}$.

## 4- Système hydraulique du 1° ordre (exemple )

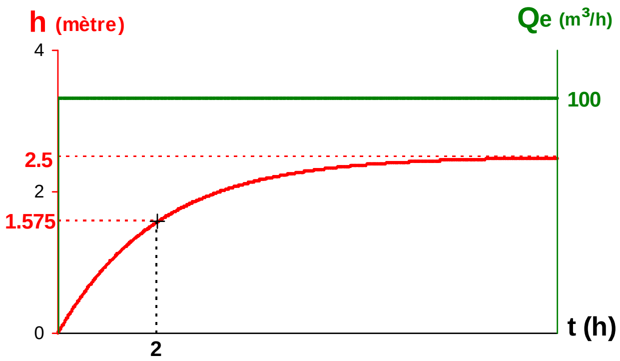
Reprenons le système constitué d'un réservoir d'eau avec remplissage et vidage (schéma ci-dessous):




$q_e$ est un échelon d'amplitude $Q_e$ (débit constant $Q_e$ à partir de t = 0)

On a montré que : $\boxed{h(t) = \frac{Q_e}{k} - \frac{Q_e}{k}e^{-t/\tau} = \frac{Q_e}{k}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$ avec $\tau = \frac{S}{k}$.

Identifions le système (détermination de S et k) en exploitant la courbe de réponse indicielle ( $q_e t) = Q_e = 100 m^3/h$ ).



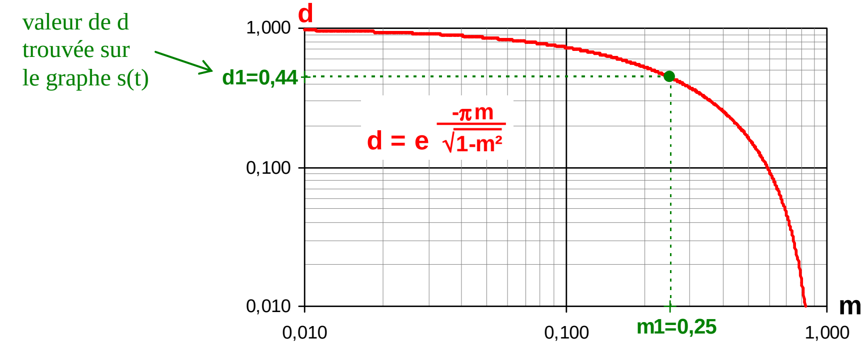

On trouve : $H_\infty = \frac{Qe}{k} = \frac{100}{k} = 2{,}5m \Rightarrow \boxed{k = \frac{100}{2{,}5} = 40 m^2/h}$.

$\tau = \frac{S}{k} = \frac{S}{40} = 2h \Rightarrow \boxed{S = 2 \times 40 = 80 m^2}$.

## 5- Système du 2° ordre avec m<1 (méthode)

- Méthode utilisant les abaques (dépassement et temps de réponse)

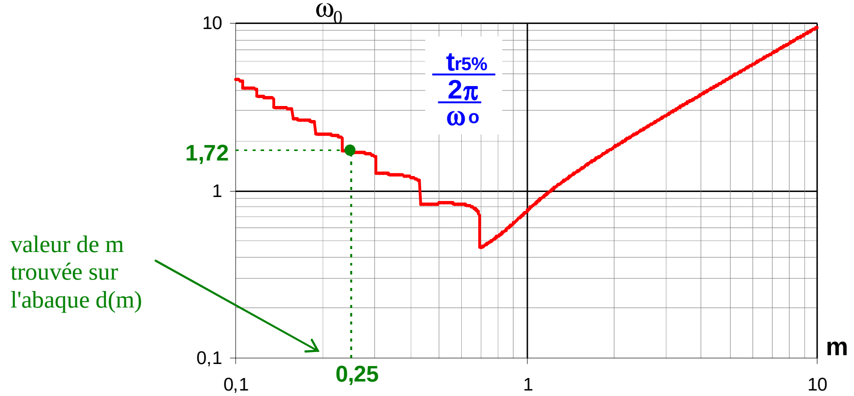
① Pour déterminer m, on mesure d sur le graphe s(t) et on reporte cette valeur de d sur l'abaque du dépassement. Il ne reste qu'à lire, directement sur l'abaque, la valeur de m correspondante (voir exemple ci-dessous avec d = 0,44 et m = 0,25):




② Pour déterminer $\omega_0$, on mesure $t_{r5\%}$ sur le graphe s(t) et on mesure $\frac{t_{r5\%}}{\frac{2\pi}{\omega_0}}$ sur l'abaque de $t_{r5\%}$ (car on connaît m). Il ne reste plus qu'à calculer $\omega_0$ qui est maintenant la seule inconnue (voir exemple ci-dessous avec m = 0,25):

On a mesuré $t_{r5\%} = 1{,}08s$ sur le graphe s(t).

On mesure maintenant $\frac{t_{r5\%}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = 1{,}72$ sur l'abaque ci-dessous :




On a donc : $\frac{1{,}08}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = 1{,}72 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 2\pi\frac{1{,}72}{1{,}08} = 10 rad/s}$.

③ Pour évaluer $S_\infty$, on trace l'asymptote horizontale et on repère son ordonnée.

■ Méthode utilisant uniquement le graphe s(t)

① Pour déterminer m, on mesure d sur le graphe s(t) et on utilise la relation

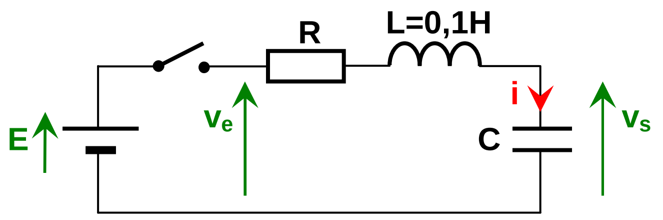
$$m = -\frac{\ln(d)}{\sqrt{(\ln(d))^2 + \pi^2}} \quad \text{(c'est la même relation que } d = e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}\text{ ).}$$

② Pour déterminer $\omega_0$ , on mesure la pseudo-pulsation ω du signal s(t) et on utilise la relation $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$ .

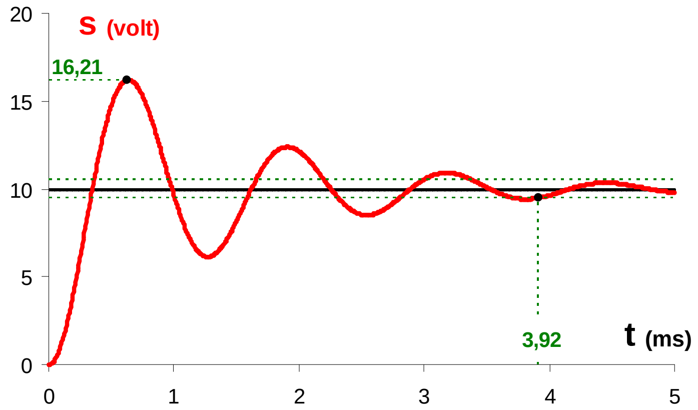
③ Pour évaluer $S_\infty$, on trace l'asymptote horizontale et on repère son ordonnée.

## 6- Système électrique du 2° ordre (exemple avec utilisation des abaques)

Reprenons le système constitué du filtre passe-bas du 2°ordre dont on veut déterminer les valeurs R et C en utilisant la réponse indicielle (schéma ci-dessous) :



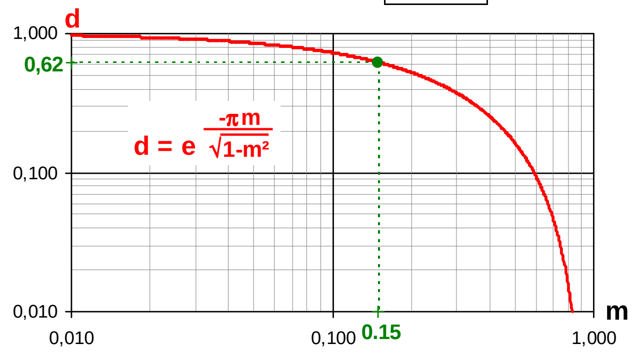

On ferme l'interrupteur K à l'instant t = 0; $\mathbf{v_e(t)}$ sera donc un échelon $\mathbf{E.\Gamma(t)}$ d'amplitude E = 10V.
Le graphe ci-dessous représente s(t) et on évalue $S_\infty$ = 10V :




① Détermination de m :

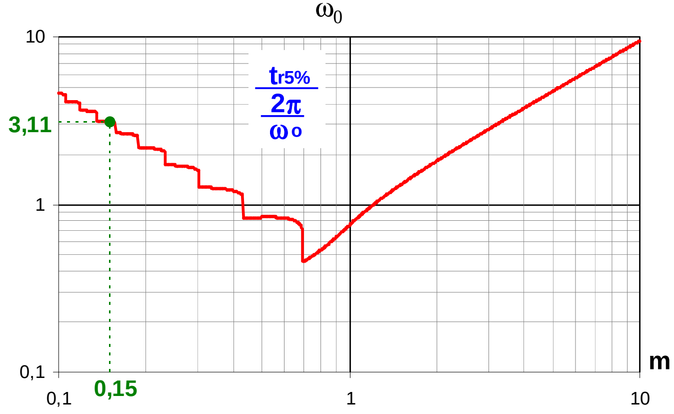
On a $S_{max}$ = 16,21V $\Rightarrow d = \dfrac{S_{max} - S_\infty}{S_\infty} = \dfrac{16{,}21 - 10}{10} = 0{,}621$ .

A partir de l'abaque ci-dessous, on trouve $\boxed{m \approx 0{,}15}$ :




② Détermination de $\omega_0$ :

On a $t_{r5\%}$ = 3,92ms et on trouve $\dfrac{t_{r5\%}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = 3{,}11$ avec l'abaque ci-dessous:




On a donc : $\dfrac{3{,}92.10^{-3}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = 3{,}11 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 2\pi\dfrac{3{,}11}{3{,}92.10^{-3}} \approx 5.10^3 \text{rad/s}}$.

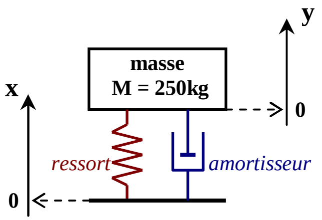
③ Détermination des paramètres du circuit (R et C) :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2.L} = \frac{1}{(5.10^3)^2 \times 0{,}1} \Rightarrow \boxed{C \approx 400\text{nF}}.$$

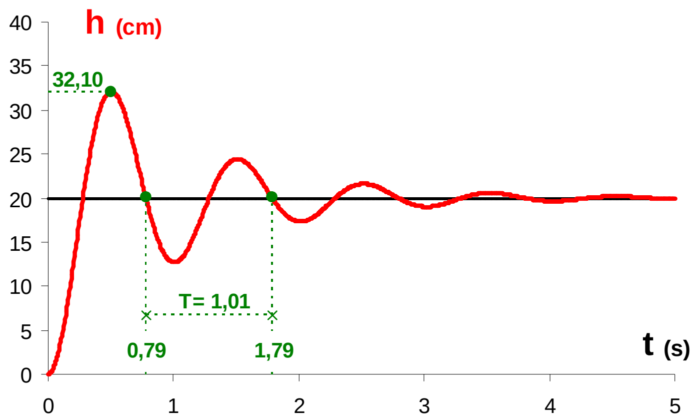
$$m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow R = 2m\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\times 0{,}15\times\sqrt{\frac{0{,}1}{400.10^{-9}}} \Rightarrow \boxed{R \approx 150\Omega}.$$

## 7- Système mécanique du 2° ordre (exemple utilisant uniquement le graphe s(t))

Reprenons le système constitué du ressort et de l'amortisseur reliant la roue au châssis (m = 250kg) d'un véhicule.
On désire déterminer **la constante de raideur k** du ressort ainsi que **le coefficient de frottement f** de l'amortisseur.




A l'instant t = 0, la position des roues augmente brutalement de la hauteur H = 20cm.
Le graphe ci-dessous illustre la réponse indicielle :




① Détermination de m :

On mesure $H_{max} = 32{,}10\text{cm} \Rightarrow d = \dfrac{H_{max} - H_{\infty}}{H_{\infty}} = \dfrac{32{,}10 - 20}{20} = 0{,}605$.

$$m = -\frac{\ln(d)}{\sqrt{(\ln(d))^2 + \pi^2}} = -\frac{\ln(0{,}605)}{\sqrt{(\ln(0{,}605))^2 + \pi^2}} \Rightarrow \boxed{m = 0{,}158}.$$

② Détermination de $\omega_0$ :

On mesure la pseudo-période T = 1,01s $\Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{1{,}01} \approx 6{,}22\text{rad/s}$

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1-m^2}} = \frac{6{,}22}{\sqrt{1-0{,}158^2}} \Rightarrow \boxed{\omega_0 \approx 6{,}30\text{rad/s}}.$$

③ Détermination des paramètres du système (k et f) :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega_0^2 = 250 \times 6{,}30^2 \Rightarrow \boxed{k \approx 9{,}9.10^3\,\text{N/m}}.$$

$$m = \frac{f}{2}\sqrt{\frac{1}{kM}} \Rightarrow f = 2m\sqrt{kM} = 2 \times 0{,}158 \times \sqrt{9{,}9.10^3 \times 250} \Rightarrow \boxed{f \approx 497\text{N.m}^{-1}\text{.s}}.$$