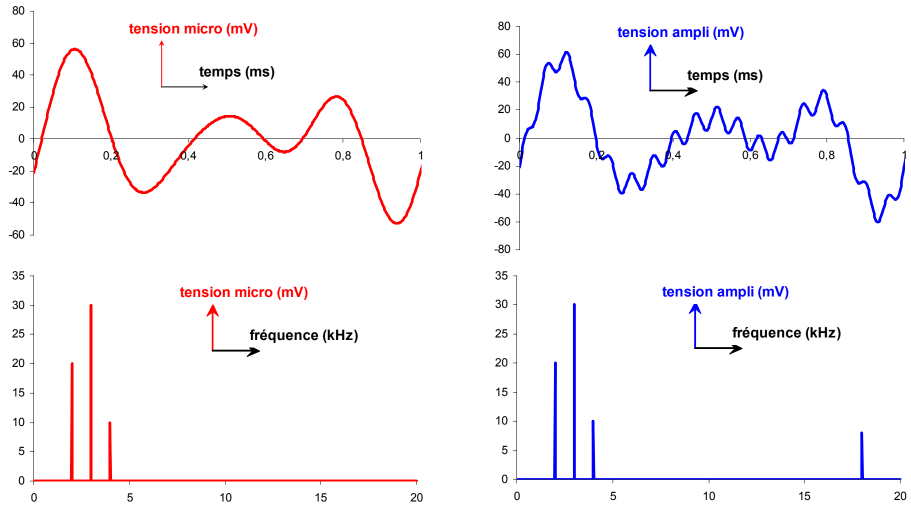
Cours Thème III
"Traitement analogique du signal"

3- SYSTÈME ANALOGIQUE LINÉAIRE APPLICATION À LA FONCTION FILTRAGE

I- INTRODUCTION (Etude d'un exemple)

1- Enregistrement d'un son (signal parasite)

L'enregistrement d'un son consiste à mesurer les variations de pression (propagation du son dans l'air) en utilisant un microphone (capteur).
Le microphone est relié au préamplificateur par un câble qui, de par sa longueur, peut être le siège de tensions parasites (perturbations).
Observons le chronogramme et le spectre relatif à la tension en sortie du micro ainsi que le chronogramme et le spectre de la tension à l'entrée du préamplificateur :



La tension à l'entrée de l'ampli est "parasitée" par une tension de fréquence élevée.
Le spectre de cette tension confirme l'existence d'une tension parasite de fréquence 18kHz.

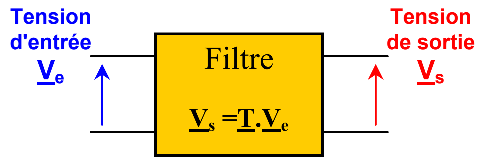
2- Elimination du signal parasite

Il faudrait utiliser un circuit (quadripôle) qui "laisse passer" les fréquences inférieures à 5kHz et qui élimine ou atténue fortement les fréquences supérieures à 5kHz.
Ce circuit qui modifie le spectre du signal d'entrée sera appelé **filtre**.
Un tel filtre peut être analogiques (résistances, condensateurs ...) ou numérique.

II- PRÉSENTATION GÉNÉRALE DES FILTRES

1- Définition

Un filtre est un circuit quadripôle (tension d'entrée v_e et tension de sortie v_s) qui réalise une modification du spectre de le tension d'entrée : $\underline{V}_s(j\omega) = \underline{T}(j\omega).\underline{V}_e(j\omega)$
On dit aussi que le filtre amplifie (ou atténue) de façon différente suivant la fréquence.



Remarque : L'amplificateur de tension étudié au chapitre précédant peut être considéré comme un cas particulier de filtre.
La méthode d'étude d'un filtre (gain, phase et diagramme de Bode) sera donc identique à la méthode d'étude d'un amplificateur.

2- Fonction de tranfert d'un filtre (transmittance)

a- Définition

La fonction de transfert $\underline{T}$ d'un filtre définit par relation :

$$\boxed{\underline{T} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}}$$ avec $\underline{V}_e$ tension d'entrée et $\underline{V}_s$ tension de sortie (régime sinusoïdal).

■ Module : $T = |\underline{T}| = \frac{V_s}{V_e}$.

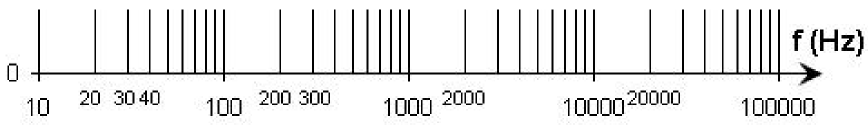
A partir du module, on peut définir **le gain** (en décibels) $\boxed{G_{dB} = 20\log|\underline{T}|}$.

■ Argument : $\text{Arg}(\underline{T})$ = "phase de v_s par rapport à v_e"

b- Représentation graphique (diagramme de Bode)

① Décades de résistances :
L'étude de la transmittance se fait, en principe, sur une large plage de fréquences.
⇒ La fréquence est représentée en abscisse sur les graphes.
Prenons par exemple une étude de transmittance pour 10Hz < f < 100kHz. Avec une échelle linéaire, la fréquences "20Hz" n'est pas visible car trop proche de "10Hz".

Il existe une échelle dite "logarithmique" qui "étire" les basses fréquences et "contracte" les hautes fréquences.
Il s'agit d'un logarithme de base 10, d'où le nom de décades de fréquences.
Dans notre exemple, l'axe des abscisses aura l'allure représentée ci-dessous :

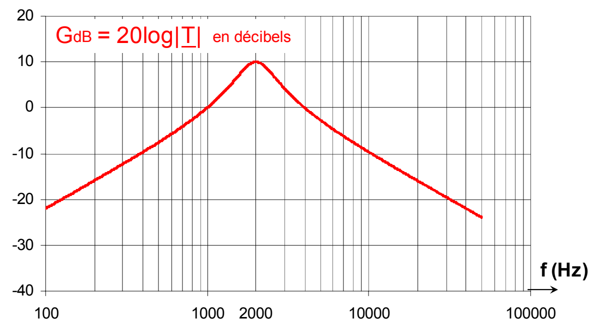


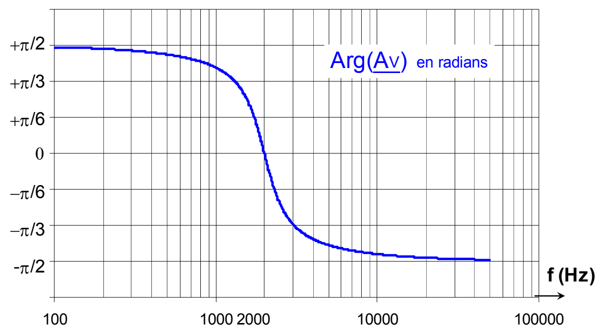
On remarque que "20Hz" et "10Hz" sont à la même distance que "20kHz" et "10kHz".

② Courbe de Gain :
On trace directement G_{dB} en fonction de la fréquence f avec une échelle logarithmique pour f.

③ Courbe de Phase :
On trace $Arg(\underline{T})$ sur la même échelle de fréquence que pour la courbe de Gain.

L'ensemble "courbe de Gain" + "courbe de Phase" constitue le diagramme de Bode de l'amplificateur (exemple sur le schéma suivant):





c- Bande passante

Un filtre sélectionne une plage donnée de fréquences appelée "bande passante".
Pour établir cette bande passante, on définit la (ou les) fréquence(s) de coupure(s) :

Définition : Une fréquence de coupure est définie chaque fois que le module A_V de l'amplification est égale à $\boxed{\dfrac{T_{max}}{\sqrt{2}}}$.

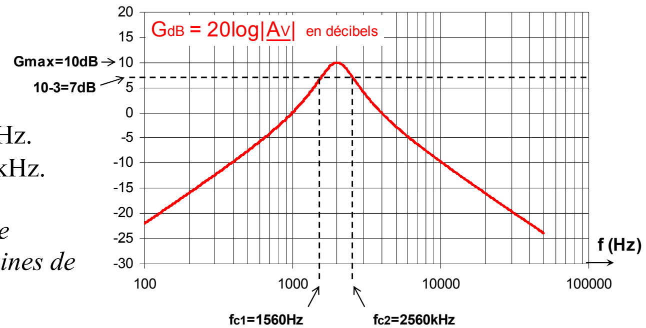
Une fréquence de coupure correspond aussi à $\boxed{G_{dB} = G_{max} - 3dB}$.

Démonstration : $20\log\dfrac{T_{max}}{\sqrt{2}} = 20\log(T_{max}) - 20\log\sqrt{2} \approx G_{max} - 3{,}010$

Dans notre exemple, on définit deux fréquences de coupure à G_{max} - 3dB = 10-3 = 7dB :

- Coupure basse : $f_{c1} \approx 1560$Hz.
- Coupure haute : $f_{c2} \approx 2560$kHz.

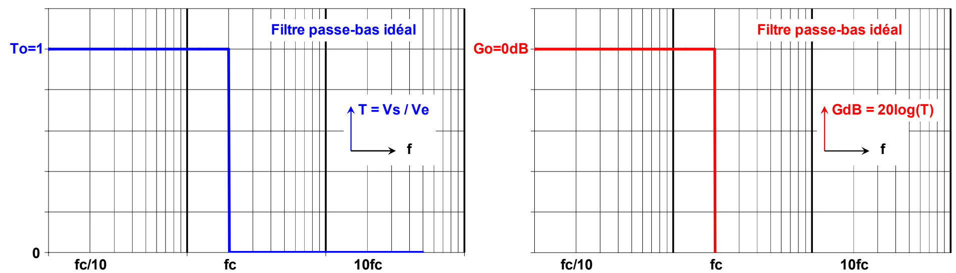
Il s'agit d'un filtre qui ne "laisse passer" que les fréquences voisines de 2kHz (filtre passe-bande).



III-FILTRES IDÉAUX

1- Filtre passe-bas idéal

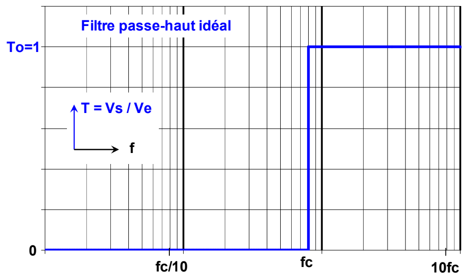
Un filtre passe-bas idéal doit "laisser passer" uniquement les composantes de fréquence inférieure à une fréquence donnée fc (fréquence de coupure).
Les courbes de transfert T de gain G = 20log(T) de ce filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c est représentée ci-dessous :

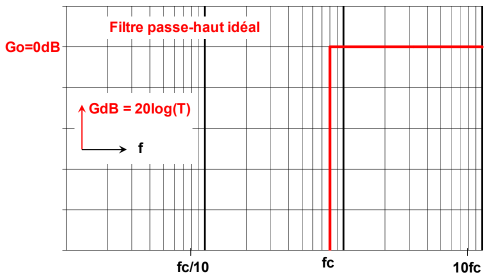


- Pour f < fc : le filtre "laisse passer" donc Vs = Ve $\Rightarrow$ T = 1 et G = 20log(1) = 0dB.
- Pour f $\geq$ fc : le filtre "élimine" donc Vs = 0V $\Rightarrow$ T = 0 et G = 20log(0) $\rightarrow$ -∞.

2- Filtre passe-haut idéal

Un filtre passe-haut idéal doit "laisser passer" uniquement les composantes de fréquence supérieure à une fréquence donnée fc (fréquence de coupure).
Les courbes de transfert T de gain G = 20log(T) de ce filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure f_c est représentée ci-dessous :

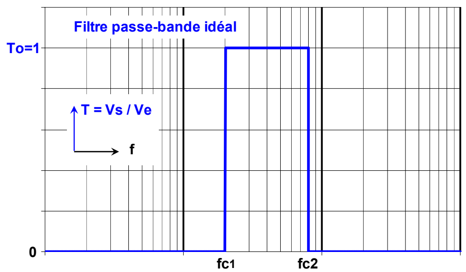


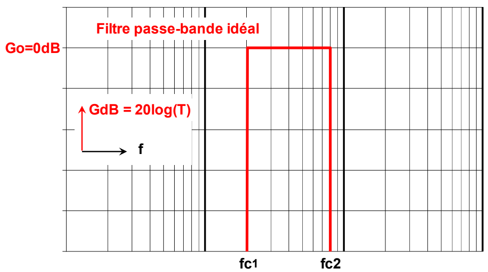


- Pour f $\leq$ fc : le filtre "élimine" donc Vs = 0V $\Rightarrow$ T = 0 et G = 20log(0) $\rightarrow$ -∞.
- Pour f > fc : le filtre "laisse passer" donc Vs = Ve $\Rightarrow$ T = 1 et G = 20log(1) = 0dB.

3- Filtre passe-bande idéal

Un filtre passe-bande idéal doit "laisser passer" uniquement composantes de fréquence comprise entre deux fréquences données f_{c1} et f_{c2} (fréquences de coupure haute et basse).
Les courbes de transfert T de gain G = 20log(T) de ce filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure f_c est représentée ci-dessous :





- Pour f $\leq$ f_{c1} : le filtre "élimine" donc Vs = 0V $\Rightarrow$ T = 0 et G = 20log(0) $\rightarrow$ -∞.
- Pour f_{c1} < f < f_{c2} : le filtre "laisse passer" donc Vs = Ve $\Rightarrow$ T = 1 et G = 20log(1) = 0dB.
- Pour f $\geq$ f_{c2} : le filtre "élimine" donc Vs = 0V $\Rightarrow$ T = 0 et G = 20log(0) $\rightarrow$ -∞.

IV- FILTRES RÉELS

1- Filtre passe-bas réel

a- Filtre passe-bas du 1° ordre

- Fonction de transfert :

Un filtre passe-bas réel du 1° ordre est caractérisé par la fonction de transfert suivante :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{T_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{|T_0|}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \text{Arg}(\underline{T}) = \text{Arg}(T_0) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right).$$

Exprimons la fonction de transfert pour $\omega = \omega_C$ (pulsation de coupure) :

$$\underline{T}(j\omega_C) = \frac{T_0}{1+j} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{|T_0|}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad G_{dB} = 20\log|T_0| - 20\log\sqrt{2} \approx G_0 - 3\text{dB}.$$

$\text{Arg}(j\omega_C) = \text{Arg}(T_0) - \tan^{-1}(1) = \text{Arg}(T_0) - \pi/4.$

Exprimons la fonction de transfert pour les valeurs limites de ω (étude asymptotique) :

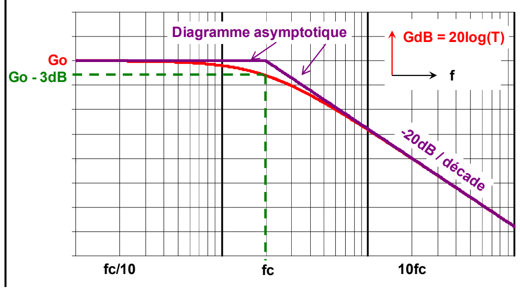
① $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{T}(j\omega) = T_0 \Rightarrow T = |T_0|$ et $\text{Arg}(\underline{T}) = \text{Arg}(T_0)$.

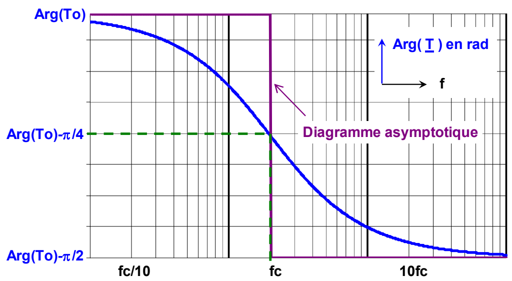
② $\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \underline{T}(j\omega) \rightarrow \dfrac{T_0}{j\dfrac{\omega}{\omega_C}} \Rightarrow T \rightarrow 0.$

et $\arg(\underline{T}) \rightarrow = \text{Arg}(T_0) - \text{Arg}(\infty) \rightarrow \text{Arg}(T_0) - \pi/2$ rad.

Lorsque ω est multiplié par 10, le gain "baisse" de 20log(1/10) = -20dB d'où une pente de -20dB / décade pour les grandes valeurs de ω.

- Diagramme de Bode (avec diagramme asymptotique)





Remarque : On rencontre souvent le cas où $T_0 > 0$. Ce qui entraîne $\mathrm{Arg}(T_0) = 0$.

b- Filtre passe-bas du 2° ordre

■ Fonction de transfert :

Un filtre passe-bas réel du 2° ordre est caractérisé par la fonction de transfert suivante :

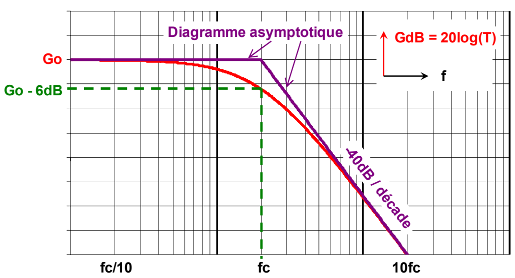
$$\underline{T}(j\omega) = \frac{T_0}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{|T_0|}{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}(\underline{T}) = \mathrm{Arg}(\underline{T}_0) - 2\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right).$$

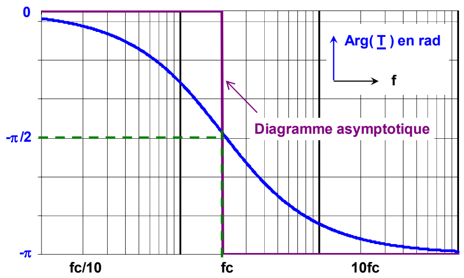
On considèrera le cas où $T_0 > 0$.

L'étude de la fonction de transfert se fait de la même manière que pour le 1° ordre et donne les résultats suivants :

① Pour $\omega = \omega_C$ on a $G \approx G_0$ - 6dB et $\mathrm{Arg}(\underline{T}(\omega_C)) = -\pi/2$.
② La pente de l'asymptote oblique est de -40 dB / décade.
③ La phase varie de 0 rad à $-\pi$ rad.

■ Diagramme de Bode (avec diagramme asymptotique)





2- Filtre passe-haut réel du 1° ordre

■ Fonction de transfert :

Un filtre passe-haut réel du 1° ordre est caractérisé par la fonction de transfert suivante (on considèrera $T_\infty > 0$) :

$$\underline{T}(j\omega) = T_\infty \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}} \quad \Rightarrow \quad T = T_\infty \frac{\dfrac{\omega}{\omega_C}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}(\underline{T}) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right).$$

Exprimons la fonction de transfert pour $\omega = \omega_C$ (pulsation de coupure) :

$$\underline{T}(j\omega_C) = T_\infty \frac{j}{1+j} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_\infty}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad G_{dB} = 20\log T_\infty - 20\log\sqrt{2} \approx G_\infty - 3\text{dB}.$$

$\mathrm{Arg}(j\omega_C) = \pi/2 - \tan^{-1}(1) = \pi/2 - \pi/4 = \pi/2$.

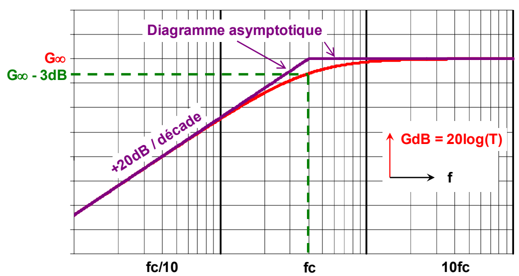
Exprimons la fonction de transfert pour les valeurs limites de ω (étude asymptotique) :

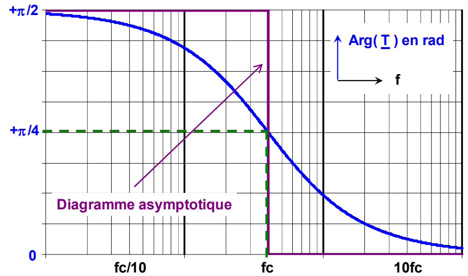
① $\omega \to 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{T}(j\omega) \to j\dfrac{\omega}{\omega_C} \quad \Rightarrow \quad T \to 0 \quad (G_{dB} \to -\infty)$ et $\mathrm{Arg}(\underline{T}) \to +\dfrac{\pi}{2}$.

Lorsque ω est multiplié par 10, le gain "augmente" de 20log(10) = +20dB d'où une pente de +20dB / décade pour les faibles valeurs de ω.

② $\omega \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underline{T}(j\omega) \to 1 \quad \Rightarrow \quad T \to 1 \quad (G_{dB} \to 0)$ et $\mathrm{Arg}(\underline{T}) \to 0$.

■ Diagramme de Bode (avec diagramme asymptotique) :





3- Filtre passe-bande du 1° ordre

■ Fonction de transfert :

Un filtre passe-bande du 1° ordre est caractérisé par une fonction de transfert dont il faut d'abord définir quelques constantes :

ω_0 : pulsation centrale du filtre;

T_{max} : module de la fonction de transfert pour $\omega = \omega_0$ (on considèrera le cas $T_{max} > 0$) ;

Q : facteur de qualité du filtre définit par la bande passante $\Delta\omega = \omega_0 / Q$ (plus Q est grand, plus la bande passante $\Delta\omega$ est étroite et plus le filtre est "sélectif").

La fonction de transfert s'écrit donc : $\quad \underline{T}(j\omega) = \dfrac{T_{max}}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{T_{max}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad Arg(\underline{T}) = -\tan^{-1}\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right].$$

Exprimons la fonction de transfert pour $\omega = \omega_0$ (pulsation centrale) :

$$\underline{T}(j\omega_0) = \frac{T_{max}}{1+jQ(1-1)} = T_{max} \Rightarrow T = T_{max} \Rightarrow G_{dB} = 20\log T_{max}.$$

$Arg(j\omega_0) = 0$.

Exprimons la fonction de transfert pour les valeurs limites de ω (étude asymptotique) :

① $\omega \to 0 \Rightarrow \underline{T}(j\omega) \to \dfrac{T_{max}}{1+jQ\left(-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} = T_{max}\dfrac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_0}} \Rightarrow T \to 0 \quad (G_{dB} \to -\infty)$ et

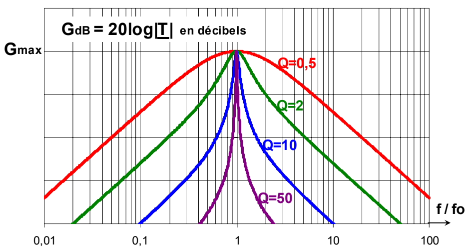
$Arg(\underline{T}) \to +\dfrac{\pi}{2}$.

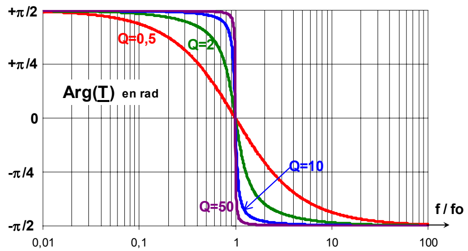
Le filtre se comporte donc comme un "passe-haut" aux fréquences petites devant f_0.

① $\omega \to +\infty \Rightarrow \underline{T}(j\omega) \to \dfrac{T_{max}}{1+jQ\frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow T \to 0 \quad (G_{dB} \to -\infty)$ et $Arg(\underline{T}) \to -\dfrac{\pi}{2}$.

Le filtre se comporte donc comme un "passe-bas" aux fréquences grandes devant f_0.

■ Diagramme de Bode :





Remarque : L'axe des abscisse est gradué en "fréquences normalisées f / f_0".
Pour retrouver la valeur de f, il suffit de faire : f = "valeur lue" × f_0.
Exemple : pour $f / f_0 = 10$ on a $f = 10f_0$.

V- DÉTERMINATION DU SPECTRE DU SIGNAL DE SORTIE

1- Méthode

On peut déterminer le spectre du signal de sortie du filtre connaissant le spectre du signal d'entrée et la fonction de transfert du filtre.
La méthode est la suivante :

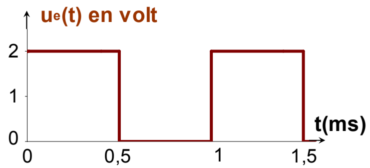
① Calculer le module T de la fonction de transfert pour chaque valeur de fréquences (harmoniques) du signal d'entrée.

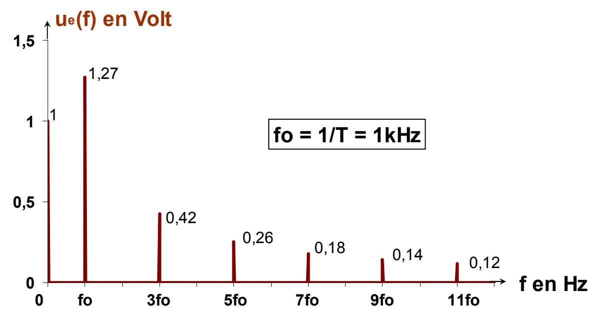
② Multiplier chaque harmonique du signal d'entrée par le module T correspondant à cette fréquence. Le résultat donne l'amplitude de l'harmonique du signal de sortie pour cette même fréquence.

2- Exemple

Déterminons une partie du spectre du signal u_s de sortie d'un filtre passe-bas pour un signal d'entrée u_e de type "carré" avec composante continue.

■ Le signal d'entrée u_e est représenté ci-dessous (chronogramme et spectre) :

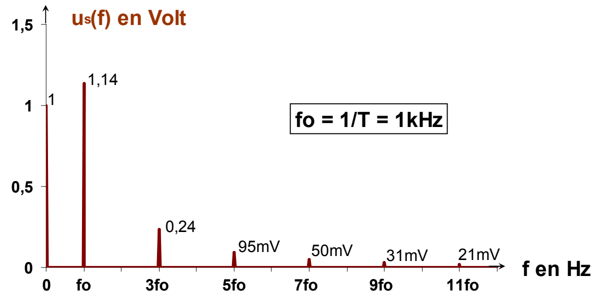




■ Fonction de transfert du filtre (f_C = 2kHz) : $\underline{T}(jf) = \dfrac{1}{1+j\frac{f}{f_C}} \Rightarrow T = \dfrac{1}{\sqrt{1+(f/f_C)^2}}$

■ Le tableau et le spectre ci-dessous résument la méthode pour calculer l'amplitude des 12 premières raies de la tension de sortie :

f (kHz)	ue(f)	T(f)	us(f)=ue(f)*T(f)
0	1	1	1
1	1,273	0,894	1,138
2	0	0,707	0
3	0,424	0,555	0,235
4	0	0,447	0
5	0,255	0,371	0,095
6	0	0,316	0
7	0,182	0,275	0,050
8	0	0,243	0
9	0,141	0,217	0,031
10	0	0,196	0
11	0,116	0,179	0,021



VI- EXEMPLES DE RÉALISATIONS DE FILTRES

1- Introduction

Les filtres analogiques peuvent être classées en deux familles :

① Les **filtres passifs** réalisés à l'aide de dipôles passifs (résistances, condensateurs et inductances).
② Les **filtres actifs** réalisés à l'aide de circuits actifs (ADI, transistors en régime linéaire ...) et de dipôles passifs.

La détermination de la fonction de transfert complexe se fait à partir de l'impédance (ou admittance) complexe des dipôles passifs constituant le filtre.

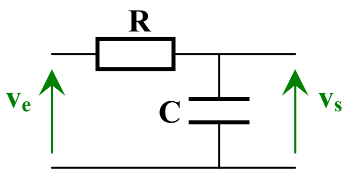
Rappels sur les impédances complexes (dipôles en convention récepteur):

- Résistance R : $\underline{Z}_R = R$ et $\underline{Y}_R = \dfrac{1}{R}$
- Inductance L : $\underline{Z}_L = jL\omega$ et $\underline{Y}_L = \dfrac{1}{jL\omega}$
- Condensateur C : $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega}$ et $\underline{Y}_C = jC\omega$.

2- Filtre passe-bas passif du 1° ordre

Le filtre passe-bas passif fréquement rencontré est la filtre "RC passe-bas" dont le montage est indiqué ci-dessous :

La fonction de transfert se détermine à l'aide de la relation relative au diviseur de tension :



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{T_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}}$$

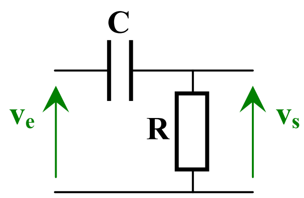
avec $\boxed{T_0 = 1}$ et $\boxed{\omega_C = \dfrac{1}{RC}}$.

3- Filtre passe-haut passif du 1° ordre

Comme pour le filtre passe-bas, un condensateur et une résistance suffisent pour réaliser un filtre passe-haut (schéma ci-dessous):

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = T_\infty \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}}$$

avec $\boxed{T_\infty = 1}$ et $\boxed{\omega_C = \dfrac{1}{RC}}$.



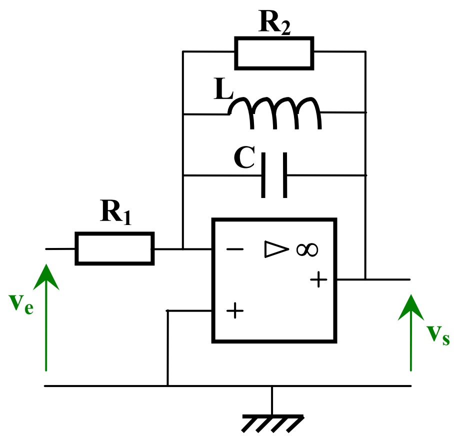
4- Filtre passe-bande actif du 1° ordre

Un filtre passe-bande actif du 1° ordre peut être réalisé à l'aide d'un ADI, d'une inductance, d'un condensateur et d'une résistance (schéma ci-dessous):

Le montage ressemble à celui de l'amplificateur inverseur.
Utilisons sa relation "entrée sortie" pour déterminer la fonction de transfert du filtre :

Considérons d'abord l'impédance $\underline{Z}_2$ constituée de R_2 , L et C en parallèle.

Appelons ensuite $\underline{Z}_1$ l'impédance de la résistance R_1.



On a donc :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = \frac{-1}{\underline{Z}_1\underline{Y}_2} = \frac{-1}{R_1\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{jL\omega} + jC\omega\right)} = \frac{-\dfrac{R_2}{R_1}}{1 + jR_2\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}$$

$$= -\frac{\dfrac{R_2}{R_1}}{1 + jR_2\sqrt{\dfrac{C}{L}}\left(\sqrt{LC}\omega - \dfrac{1}{\sqrt{LC}\omega}\right)} = -\frac{T_{max}}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec $\boxed{T_{max} = \frac{R_2}{R_1}}$; $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = R_2\sqrt{\frac{C}{L}}}$.

Méthode de réglage :

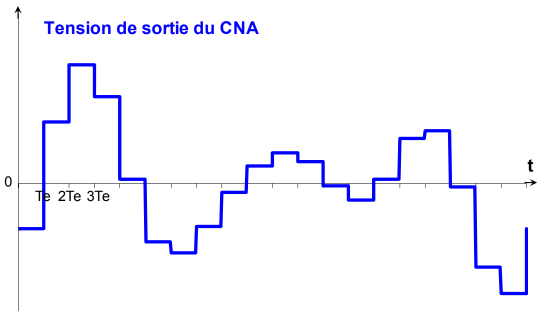
① La fréquence centrale s'ajuste à l'aide de L et C.
② Le gain $G_{max} = 20\log T_{max}$ (fréquence centrale) se règle avec le rapport R_2 / R_1.
③ La sélectivité du filtre est d'autant plus grande que R_2 est élevée.

Remarque : Ce filtre est "inverseur", il introduit un changement de signe.

VII- EXEMPLES D'UTILISATIONS DE FILTRES

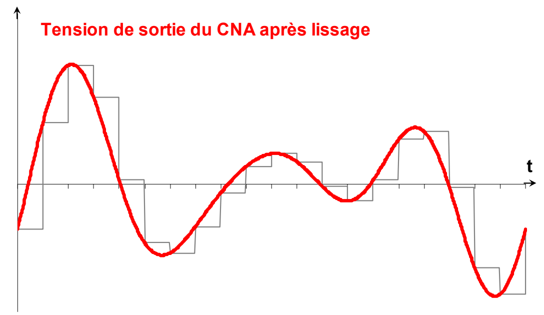
1- Lissage de tension en sortie d'un CNA

La tension de sortie d'un convertisseur numérique analogique se présente des "marches d'escalier" on dit que le signal est "échantillonné bloqué" avec T_e période d'échantillonnage (schéma ci-dessous):



Les variations rapides du signal dues aux"marches d'escalier" induisent des composantes hautes fréquences qui sont souvant indésirables.

Il faudra donc appliquer un filtrage passe-bas au signal et ainsi réaliser un lissage (shéma-ci-dessous):

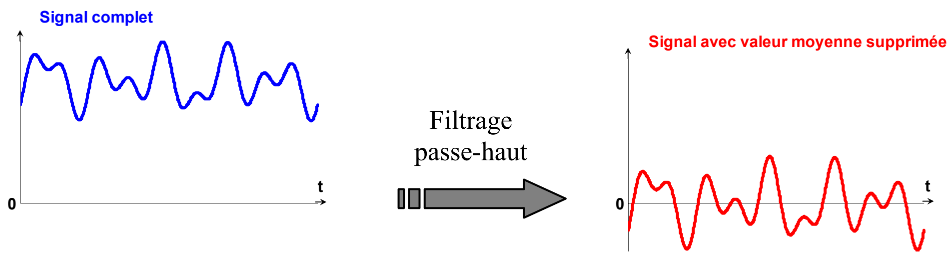


2- Elimination de la composante continue

Avant de la transmission d'un signal, il est souvent souhaitable d'éliminer sa composante continue (valeur moyenne) qui ne contient pas d'information.

La valeur moyenne représente la composante de fréquence nulle. Il faudra donc effectuer un filtrage passe-haut pour éliminer cette valeur moyenne.

Les chronogrammes ci-dessous illustrent l'élimination de la composante continue :



3- Récepteur radiofréquences

Un antenne reçoit une multitude d'ondes radio de différentes fréquences.
Pour recevoir la station désirée, il faut sélectionner la bande de fréquences relative à cette station.

Un filtre passe-bande à fréquence centrale réglable permettra de recevoir le signal émis par la station et d'éliminer les autres signaux.

L'action d'un tel filtre est facilement mis en évidence en considérant le spectre des signaux :