Cours Chapitre A5

LES RÉGIMES TRANSITOIRES

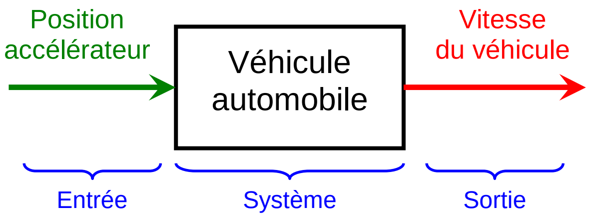
OBJECTIFS

- Définir le régime permanent et le régime transitoire pour un système quelconque commandé.
- Poser et résoudre mathématiquement une équation différentielle du 1° ordre avec tracé de la courbe de réponse.
- Poser et résoudre graphiquement (abaques) une équation différentielle du 2° ordre (propriétés de la courbe de réponse).
- Etude de quelques exemples en électricité, mécanique et électrothermie.

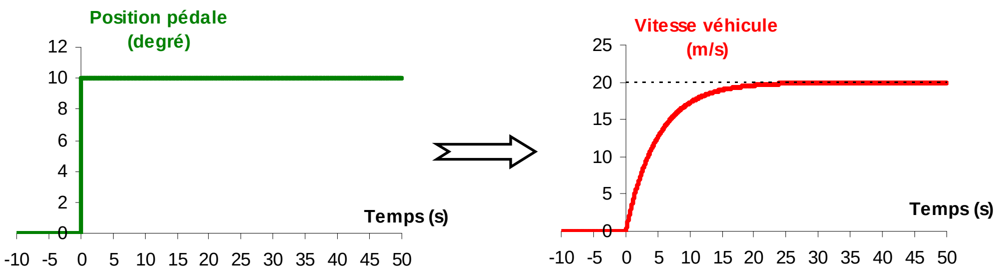
I- INTRODUCTION (étude d'exemples)

1- Exemple 1

Considérons le système constitué d'une automobile :
- l'entrée du système sera la position angulaire (en degré) de la pédale d'accélérateur,
- la sortie du système sera la vitesse du véhicule (en km/h).



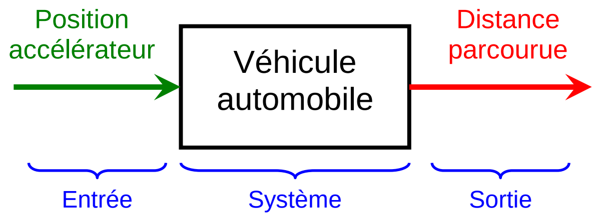
Observons l'évolution de la vitesse (sortie du système) lorsque le conducteur actionne brutalement la pédale d'accélérateur de 10° (entrée du système) :



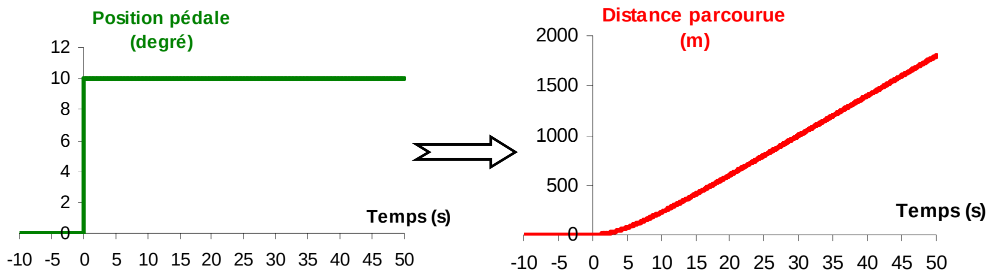
Observations :
- la sortie du système ne commence à évoluer que lorsque l'entrée est "active",
- de 0 à 20s la sortie évolue, c'est le **régime transitoire**,
- à partir de 20s la sortie évolue peu, c'est le **régime permanent** entretenu par l'entrée.

2- Exemple 2

Considérons toujours le système constitué d'une automobile :
- l'entrée du système sera la position angulaire, en degré, de la pédale d'accélérateur,
- la sortie du système est maintenant la distance parcourue par le véhicule.



Observons l'évolution de la distance parcourue (sortie du système) lorsque le conducteur actionne brutalement la pédale d'accélérateur de 10° (entrée du système) :



Observations :
- comme pour l'exemple 1, la sortie du système ne commence à évoluer que lorsque l'entrée est "active",
- de 0 à 20s la pente de la sortie évolue, c'est le **régime transitoire**,
- à partir de 20s la pente de la sortie évolue peu, c'est le **régime permanent** entretenu par l'entrée.

Premières conclusions :
- Un même système peut être étudié de différentes façons suivant le choix des grandeurs d'entrée et de sortie.
- L'étude d'un système ne passe pas forcément par l'analyse de sa constitution interne, il est souvent considéré comme une "boite noire".

II- DÉFINITIONS

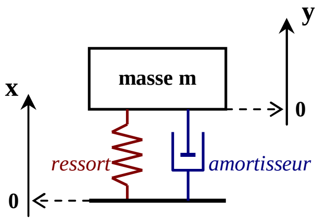
1- Régime transitoire - Régime permanent

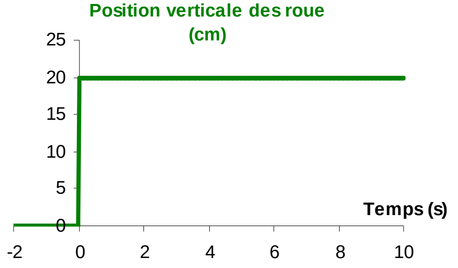
Dans tout ce chapitre, on considère que le système est excité (entrée active) à partir de l'instant t = 0 (système causal).
L'évolution de la sortie se fait **par superposition** de deux régimes :

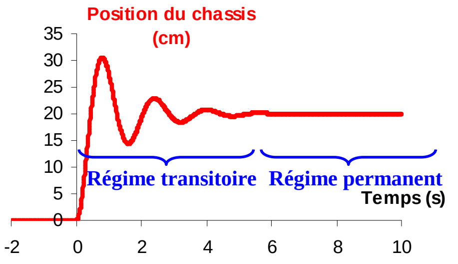
- Un régime transitoire souvent provoqué par l'inertie du système.
- Un régime permanent ou régime forcé **entretenu par l'entrée** et présentant des caractéristiques n'évoluant presque plus.

Exemples :

■ Ressort + amortisseur d'un véhicule (x : position des roues et y : position de châssis)



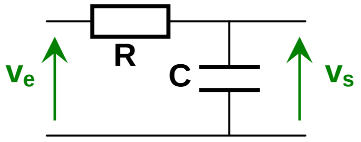




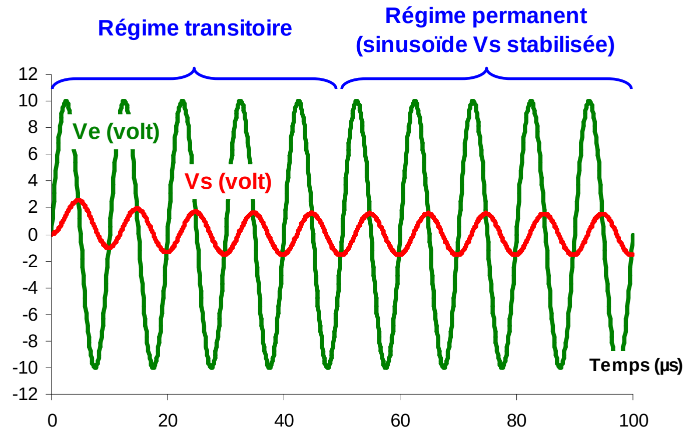
Dans cet exemple, le régime transitoire est de type **"oscillant amorti"** alors que le régime permanent est de type **"continu ou constant"**.
Remarque : le régime permanent est imposé par l'entrée (20cm).

■ Circuit en régime sinusoïdal

Considérons le circuit "RC série" très utilisé dans le filtrage passe-bas.



Soumettons le circuit à une tension sinusoïdale d'amplitude et de fréquence constantes.

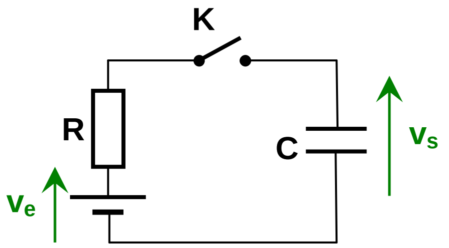


Dans cet exemple, le régime transitoire est de type **"sinusoïdal non établi"** alors que le régime permanent est de type **"sinusoïdal d'amplitude et fréquence constantes"**.

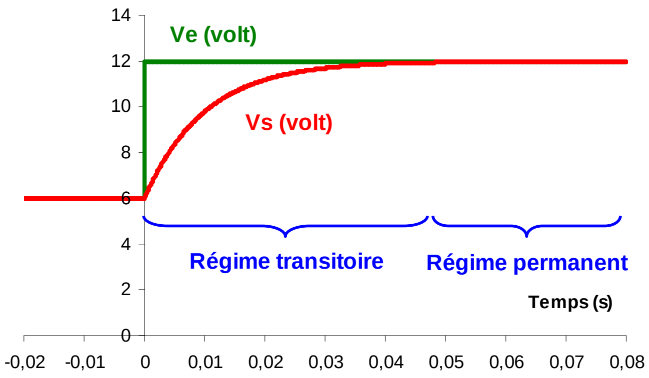
Remarque : la forme du signal en régime permanent est imposée par l'entrée (sinusoïde). C'est le cas du régime sinusoïdal forcé qui a été étudié dans les classes antérieures (filtrage analogique par exemple).

■ Charge d'un condensateur

Considérons un dispositif de recharge d'un condensateur lorsque celui-ci a perdu la moitié de sa charge :

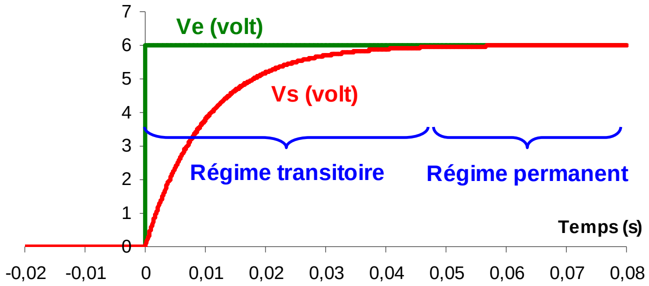


A l'instant t = 0, l'interrupteur K se ferme (voir chronogrammes page suivante).



Dans cet exemple, le régime transitoire est de type **"réponse 1° ordre"** alors que le régime permanent est de type **"continu ou constant"**.

Remarque : Le condensateur est déjà chargé à t < 0. On peut **simplifier l'étude** en considérant le condensateur déchargé avec une tension v_e qui passe de 0 à 6V (chronogramme ci-dessous):

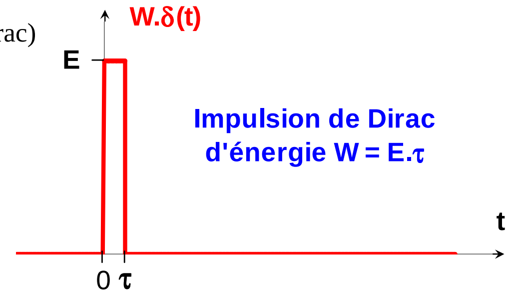


2- Types d'excitations (entrée du système)

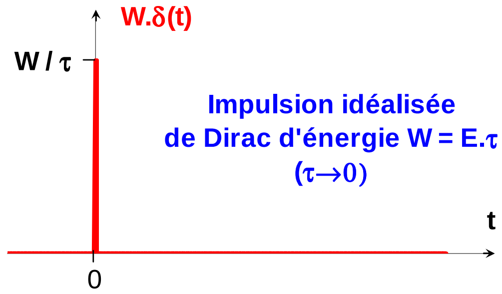
Le signal d'entrée (excitation) d'un système peut prendre plusieurs formes. Nous retiendrons trois familles pour ce signal d'entrée.

- Signal de type impulsion **W.δ(t)** (Dirac)

  Ce signal a la forme d'une impulsion d'amplitude E et de durée τ :



On peut définir l'énergie W de l'impulsion en posant W = E.τ .
En faisant tendre τ vers 0, on tend vers l'impulsion "idéalisée" d'énergie W et d'amplitude $E = \dfrac{W}{\tau}$ (chronogramme ci-dessous) :

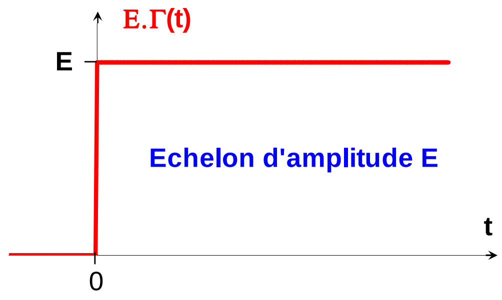


Remarques *: L'impulsion d'énergie 1 sera notée δ(t).*
Aucune théorie Mathématique sur l'impulsion de Dirac ne sera développée dans ce cours.

- Signal de type "échelon" **E.Γ(t)**

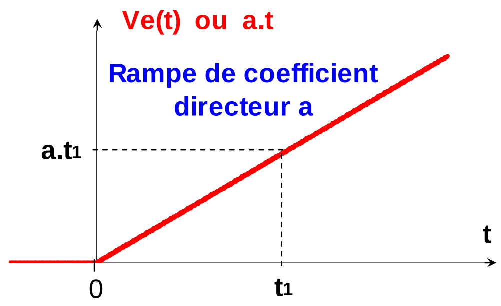
  Ce signal impose, à partir de t = 0, une grandeur **E constante** :

  Remarque *: L'échelon d'amplitude 1 sera noté Γ(t)*



- Signal de type "rampe" **a.t**

  Ce signal impose, à partir de t = 0, une grandeur croissante de coefficient directeur **a** :



3- Système du 1° ordre

a- Définition

Un système du 1°ordre d'entrée **e(t)** et de sortie **s(t)** sera régit par une équation différentielle du 1° ordre à coefficients constants :

$$\boxed{\tau\dot{s}(t) + s(t) = f(t)}$$

f(t) est proportionnel au signal d'entrée (impulsion ,échelon ...) et **τ** est une constante qui caractérise le système (constante de temps)

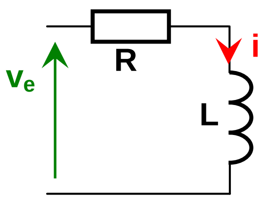
On rappelle que $\dot{s}(t)$ *est la notation simplifiée de* s' *ou* $\frac{ds}{dt}$.

La solution générale de l'équation est : $\boxed{s(t) = A + B.e^{-t/\tau}}$

Les constantes A *et* B *seront déterminées en considérant* $s(0)$ *et* $s(\infty)$.

b- Exemple d'un système électrique

Soit le système constitué de la partie électrique simplifiée d'un enroulement de moteur pas-à-pas (schéma ci-dessous) :



L'entrée du système sera la tension $\mathbf{v_e}$ d'alimentation du moteur (échelon **E.Γ(t)** d'amplitude **E**) et la sortie du système sera le courant **i** traversant le circuit (on rappelle que le moteur ne tourne que si le courant est suffisant).

Mise en équation du système commandé :

$$v_e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Soit en notation simplifiée : $v_e(t) = Ri(t) + L\dot{i}(t)$

$$\Rightarrow \frac{L}{R}\dot{i}(t) + i(t) = \frac{v_e(t)}{R} = \frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow \tau.\dot{i}(t) + i(t) = \frac{E}{R}.$$

Résolution de l'équation :

$$i(t) = A + B.e^{-t/\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

Détermination de A et B : $i(0) = 0 \Rightarrow 0 = A + B$

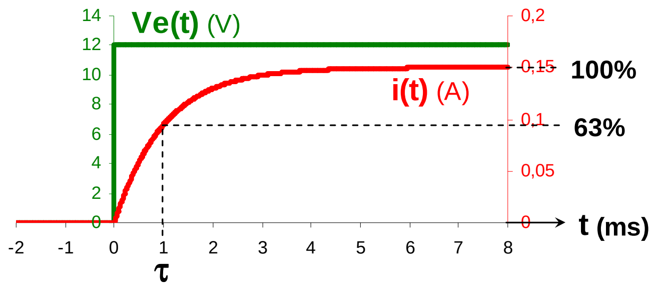
$i(\infty) = E/R \Rightarrow E/R = A + 0$

Bilan : A = E/R et B=-E/R

Solution : $\boxed{i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-t/\tau} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

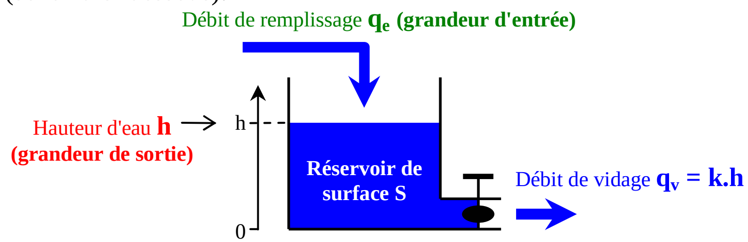
Remarque : $-\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$ représente le régime transitoire et $\frac{E}{R}$ le régime permanent.

Le chronogramme ci-dessous représente $v_e(t)$ et i(t) pour E = 12V, R = 80Ω et L = 80mH (τ=L/R=1ms) :



b- Exemple d'un système hydraulique

Soit le système constitué d'un réservoir d'eau (vide à l'instant t=0) avec remplissage et vidage (schéma ci-dessous):



Phrases "clé" : *Le débit de vidage est proportionnel à la hauteur :* $q_v = k.h$

Le débit (q_e - q_v) *est responsable de la variation dV/dt du volume V=S.h*

q_e est un échelon d'amplitude Q_e (débit constant Q_e à partir de t = 0)

Mise en équation du système commandé :

$$q_e - q_v = \frac{dv}{dt} \quad \text{avec } q_e = Q_e \text{ (constant)} \;;\; q_v = k.h \text{ (k = constante)} \quad \text{et} \quad v = S.h$$

$$\Rightarrow \quad Q_e - k.h = S\frac{dh}{dt} \quad (q_e \text{ est la grandeur d'entrée et h la grandeur de sortie})$$

$$\Rightarrow \quad S\frac{dh}{dt} + k.h = Q_e$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S}{k}\frac{dh}{dt} + h = \frac{Q_e}{k} \quad \text{ou} \quad \boxed{\tau\dot{h} + h = \frac{Q_e}{k}} \quad \text{avec } \tau = \frac{S}{k} \text{ constante de temps.}$$

Résolution de l'équation :

$h(t) = A + B.e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{S}{k}$.

Détermination de A et B : $h(0) = 0 \Rightarrow 0 = A + B$

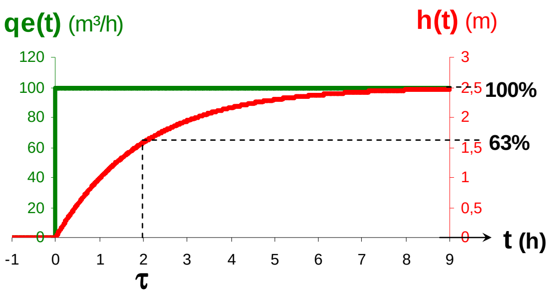
$h(\infty) = Q_e/k \Rightarrow Q_e/k = A + 0$

Bilan : $A = Q_e/k$ et $B = -Q_e/k$

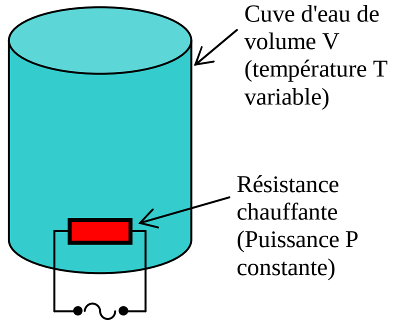
Solution : $\boxed{h(t) = \frac{Q_e}{k} - \frac{Q_e}{k}e^{-t/\tau} = \frac{Q_e}{k}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

Remarque : $-\frac{Q_e}{k}e^{-t/\tau}$ représente le régime transitoire et $\frac{Q_e}{k}$ le régime permanent.

Le chronogramme ci-dessous représente $q_e(t)$ et $h(t)$ pour $Q_e = 100m^3/h$, $S = 80m^2$ et $k = 40m^2/h$ ($\tau = S/k = 2h$) :



c- Exemple d'un système électrothermique



Considérons un chauffe-eau électrique constitué d'une résistance électrique (puissance P) plongée dans une cuve d'eau (Volume V et température initiale $T = T_0$).
La cuve présente des pertes thermiques (résistance thermique R_{th} avec l'extérieur de température ambiante T_{ext})

L'entrée du système est la puissance thermique P apportée par la résistance et la sortie du système est la température variable T de l'eau (uniforme dans toute la cuve).

L'échange thermique Φ_{perdu} entre l'eau et le milieu extérieur subit la loi de Fourier :

$$\boxed{\Phi_{perdu} = \frac{1}{R_{th}}(T - T_{ext})} \quad \text{avec :}$$

Φ_{perdu}	puissance thermique perdue vers l'extérieur en W
R_{th}	résistance thermique de l'isolation de la cuve en $W^{-1}.°C$
T_{ext}	température ambiante autour de la cuve.

Le transfert thermique élémentaire dQ fait élever la température de la masse m d'eau de la valeur dT suivant la relation :

$$\boxed{dQ = mcdT} \quad \text{avec :}$$

dQ transfert thermique élémentaire en Joule (on rappelle que $\Phi = \frac{dQ}{dt}$)

m masse de l'eau en kg

c capacité thermique massique de l'eau en $J.kg^{-1}.°C^{-1}$

dT variation élémentaire de température d'eau T pendant l'instant dt.

Mise en équation :

Le bilan thermique global reçu par l'eau est $\boxed{P - \Phi_{perdu} = \frac{dQ}{dt}}$

$$\Rightarrow \quad P - \frac{1}{R_{th}}(T - T_{ext}) = mc\frac{dT}{dt} \quad \textit{C'est l'équation différentielle brute}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R_{th}}T + mc\frac{dT}{dt} = P + \frac{1}{R_{th}}T_{ext} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T + mcR_{th}\frac{dT}{dt} = R_{th}P + T_{ext}}$$

On reconnaît l'équation différentielle du 1° ordre : $\boxed{T + \tau\dot{T} = T_\infty}$ avec :

$\boxed{\tau = mcR_{th}}$ et $\boxed{T_\infty = R_{th}P + T_{ext}}$ et on rappelle que : $\dot{T} = \dfrac{dT}{dt}$

Résolution de l'équation :

On admet que la solution générale est : $T(t) = A + B.e^{-t/\tau}$

Détermination de A et B : $T(0) = T_0 \Rightarrow A + B = T_0$

$T(\infty) = T_\infty \Rightarrow A = T_\infty$

Bilan : $A = T_\infty$ et $B = T_0 - T_\infty$

Solution : $T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{T(t) = T_0 + (T_\infty - T_0)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

Remarque : $(T_0 - T_\infty)e^{-t/\tau}$ représente le régime transitoire et T_∞ le régime permanent.

Chronogramme T(t) :

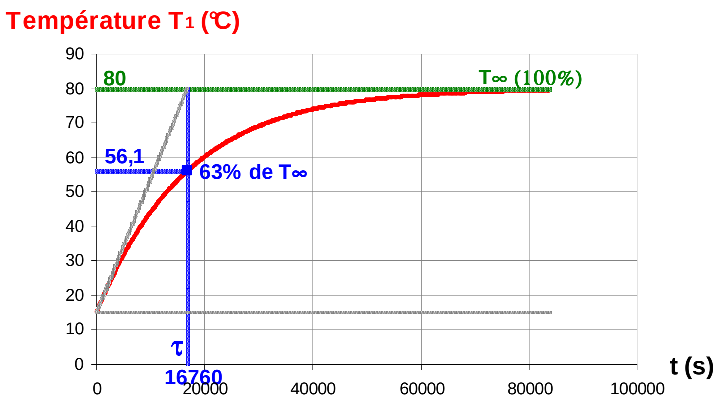
Le chronogramme ci-dessous représente les variations de T en fonction de temps avec les données suivantes :

Puissance résistance (W)	P =	3000
Résistance thermique isolant (°C / W)	Rth =	0,02
Température initiale (°C)	To =	15
Température extérieure (°C)	Text =	20
Capacité thermique massique de l'eau (J / kg / K)	C =	4190
Masse d'eau (kg)	m =	200

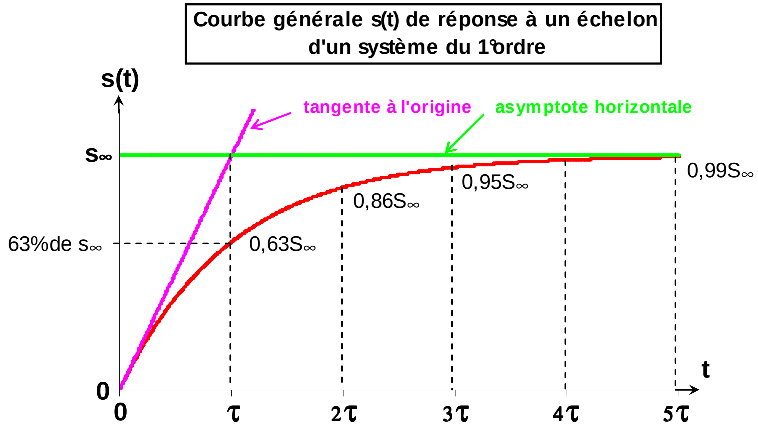
Données

Température finale (°C)	T∞ =	80
Constante de temps (seconde)	τ =	16760

Résultats



d- Propriétés de la courbe de réponse à un échelon (1° ordre)



La courbe s(t) possède **les propriétés importantes** ci-dessous :

① L'asymptote horizontale a pour ordonnée $S_\infty = \lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$.

② L'asymptote horizontale coupe la tangente à l'origine à l'instant $t = \tau$.

③ A l'instant $t = \tau$, s(t) atteint 63% de sa valeur finale S_∞ ($s(\tau) = 0{,}63\ S_\infty$).

④ Aux instants $t = 2\tau$, 3τ et 5τ la sortie s(t) atteint 86% , 95% et 99% de S_∞.

4- Système du 2° ordre

a- Définition (limitée au cas de la réponse à un échelon)

Un système du 2°ordre d'entrée **e(t)** et de sortie **s(t)** sera régit par une équation différentielle du 2°ordre à coefficients constants :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{s}(t)+2m\frac{1}{\omega_0}\dot{s}(t)+s(t)=f(t)}$$

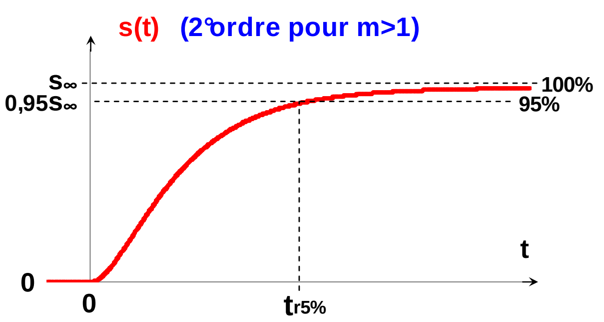
- **f(t)** est proportionnel au signal d'entrée **e(t)** et on aura **f(t) = s(∞)** si le système est stable (plus de variations lorsque $t \to +\infty$).
- $\boldsymbol{\omega_0}$ est une constante qui caractérise la pulsation d'oscillation propre du système (pulsation propre).
- **m** est une constante qui caractérise l'amortissement du système (coefficient d'amortissement **m** > **0**).

On rappelle que $\dot{s}(t)$ *est la notation simplifiée de* s' *ou* $\frac{ds}{dt}$ *et que* $\ddot{s}(t)$ *est la notation simplifiée de* s'' *ou* $\frac{d^2s}{dt^2}$.

La solution générale de l'équation dépend de la valeur de m.

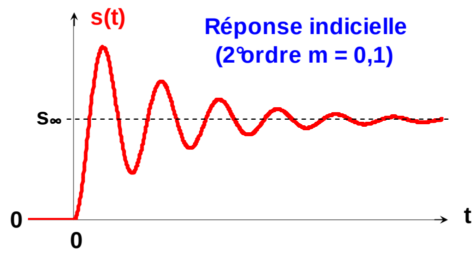
Dans le cadre de BTS Electrotechnique, les expressions solutions de l'équation différentielle du 2° ordre ne sont pas au programme, seules les propriétés des graphes sont à connaître.

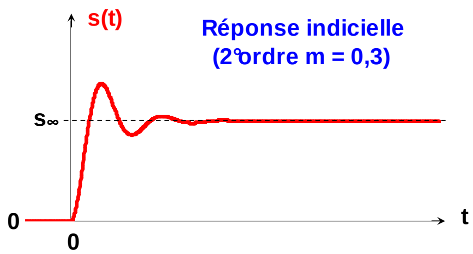
■ m > 1 (réponse non oscillante)

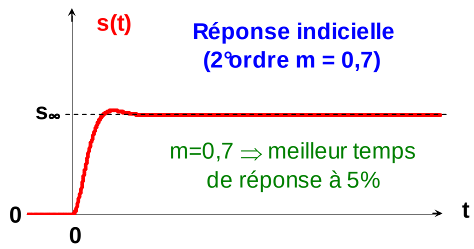


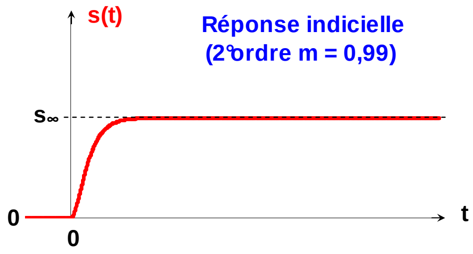
■ m < 1 (réponse oscillante amortie)

Les graphes ci-dessous illustrent s(t) pour quelques valeurs de m (m < 1) :

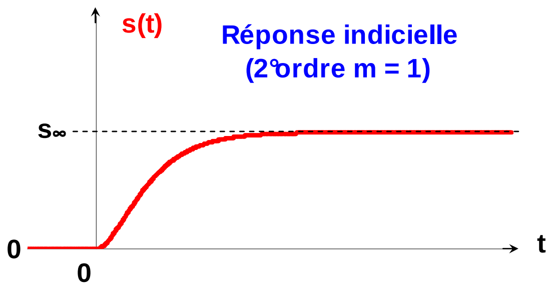






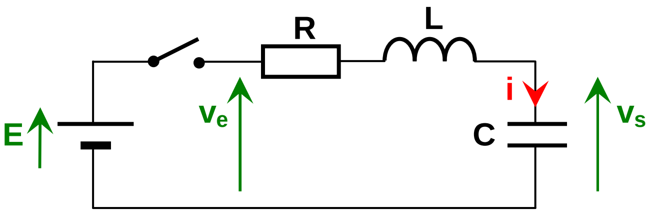


■ m = 1 (régime intermédiaire)



b- Exemple d'un système électrique

Soit le circuit réalisant un filtre passe-bas du 2°ordre dont on veut étudier la réponse indicielle (schéma ci-dessous) :



On ferme l'interrupteur K à l'instant t = 0; $\mathbf{v_e(t)}$ sera donc un échelon $\mathbf{E.\Gamma(t)}$ d'amplitude **E**.
La sortie du système sera la tension $\mathbf{v_s}$ aux bornes du condensateur C (tension de sortie du filtre).

Mise en équation du système commandé :

$$v_e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_s(t) \quad \text{avec} \quad v_e(t) = E \quad \text{et} \quad i = C\frac{dv_s(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad E = RC\frac{dv_s(t)}{dt} + LC\frac{d^2v_s(t)}{dt^2} + v_s(t)$$

Soit en notation simplifiée : $\boxed{LC\ddot{v}_s + RC\dot{v}_s + v_s = E}$

L'équation est conforme à celle de la définition : $\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{s}(t) + 2m\frac{1}{\omega_0}\dot{s}(t) + s(t) = f(t)$

On a donc par identification : $\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{v}_s(t) + 2m\frac{1}{\omega_0}\dot{v}_s(t) + v_s(t) = E$

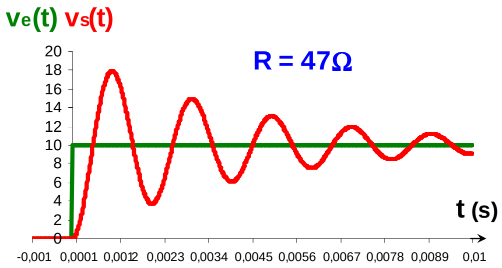
$$\boxed{s(\infty) = f(t) = E}$$

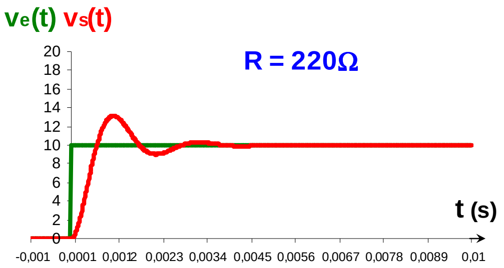
$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{car} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = LC$$

$$\boxed{m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}} \quad \text{car} \quad 2m\frac{1}{\omega_0} = RC \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2}RC\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Le graphe suivant illustre la réponse indicielle du filtre avec les données suivantes :

E = 10V ; L = 0,1H ; C = 1µF et R = 47Ω puis 220Ω.

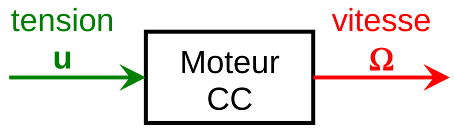




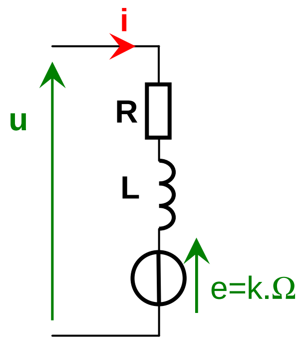
On constate que la résistance agit sur le coefficient d'amortissement m (plus R est élevée, plus l'amortissement est important); il suffit d'observer la relation donnant m en fonction de R,L et C.

c- Exemple d'un système électromécanique (moteur à courant continu)

Le système à étudier sera le moteur à courant continu à aimant permanent (excitation constante) avec frottements négligés.
L'entrée du système sera la tension d'alimentation **u(t)** (échelon d'amplitude E) et la sortie sera la vitesse de rotation **Ω(t)** du moteur.



Mise en équation du système commandé :



- Equation électrique : $\boxed{u = e + Ri + L\frac{di}{dt}}$
- Equation électromécanique (vitesse Ω et couple T) :

$$\boxed{e = k.\Omega} \quad \text{et} \quad \boxed{T = k.i} \quad \Rightarrow \quad u = k.\Omega + Ri + L\frac{di}{dt}$$

- Equation mécanique (moment d'inertie J):

$$\boxed{T = J\frac{d\Omega}{dt}} \Rightarrow \quad i = \frac{J}{k}\frac{d\Omega}{dt}$$

Bilan : $u = k.\Omega + \frac{RJ}{k}\frac{d\Omega}{dt} + \frac{LJ}{k}\frac{d^2\Omega}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{LJ}{k^2}\frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{RJ}{k^2}\frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{E}{k}}$

→ on rappelle que u(t)=E (échelon)

L'équation est conforme à celle de la définition : $\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{s}(t)+2m\frac{1}{\omega_0}\dot{s}(t)+s(t)=f(t)$

<u>On a donc par identification</u> : $\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{\Omega}(t)+2m\frac{1}{\omega_0}\dot{\Omega}(t)+\Omega(t)=\frac{E}{k}$

$$\boxed{\Omega(\infty)=f(t)=\frac{E}{k}}$$

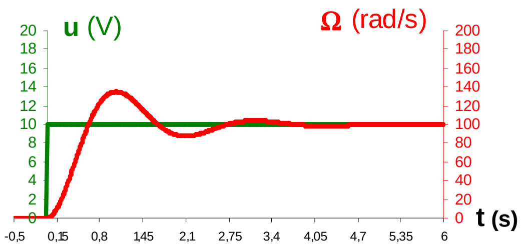
$$\boxed{\omega_0=\frac{k}{\sqrt{LJ}}} \quad \text{car} \quad \frac{1}{\omega_0^2}=\frac{LJ}{k^2}$$

$$\boxed{m=\frac{R}{2k}\sqrt{\frac{J}{L}}} \quad \text{car} \quad 2m\frac{1}{\omega_0}=\frac{RJ}{k^2} \Rightarrow m=\frac{1}{2}\frac{RJ}{k^2}\frac{k}{\sqrt{LJ}}.$$

Le graphe ci-dessous illustre la réponse indicielle du moteur :

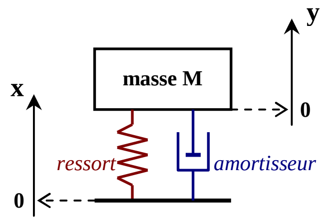
<u>Données</u> :

E = 10V
R = 2Ω
L = 1H
$J = 1.10^{-3}\ m^2.kg$
$k = 0,1V.rad^{-1}.s$



d- <u>Exemple d'un système mécanique (ressort + amortisseur de véhicule))</u>

Le système est ici constitué d'un ressort et d'un amortisseur reliant la roue au châssis d'un véhicule.
La position des roues (entrée du système) sera repérée sur l'axe 0x et la position du châssis (sortie du système) sur l'axe Oy (voir schéma ci-dessous) :



<u>Mise en équation du système commandé</u> :

- Relation fondamentale de la mécanique : $\boxed{\sum Forces=M.a=M\frac{dv}{dt}=M\frac{d^2y}{dt^2}}$

  avec : $F_{ressort}=k(x-y)$ (k : constante de raideur du ressort)

  $F_{amortisseur}=f.v=f(\dot{x}-\dot{y})$

  L'entrée est un échelon de position d'amplitude H (franchissement d'un trottoir de hauteur H par exemple). On a donc x(t)=H et $\dot{x}(t)=0$.

<u>Bilan</u> : $k(x-y)-f\dot{y}=M\ddot{y} \Rightarrow \boxed{\frac{M}{k}\ddot{y}+\frac{f}{k}\dot{y}+y=H}$ car x(t) = H (échelon).

L'équation est conforme à celle de la définition : $\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{s}(t)+2m\frac{1}{\omega_0}\dot{s}(t)+s(t)=f(t)$

<u>On a donc par identification</u> : $\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t)+2m\frac{1}{\omega_0}\dot{y}(t)+y(t)=H$

$$\boxed{y(\infty)=f(t)=H}$$

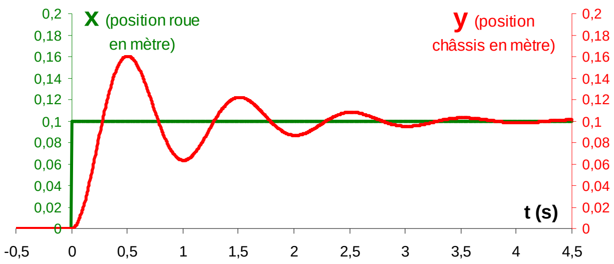
$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M}}} \quad \text{car} \quad \frac{1}{\omega_0^2}=\frac{M}{k}$$

$$\boxed{m=\frac{f}{2}\sqrt{\frac{1}{kM}}} \quad \text{car} \quad 2m\frac{1}{\omega_0}=\frac{f}{k} \Rightarrow m=\frac{f}{2}\frac{1}{k}\sqrt{\frac{k}{M}}.$$

Le graphe ci-dessous illustre la réponse indicielle du système :

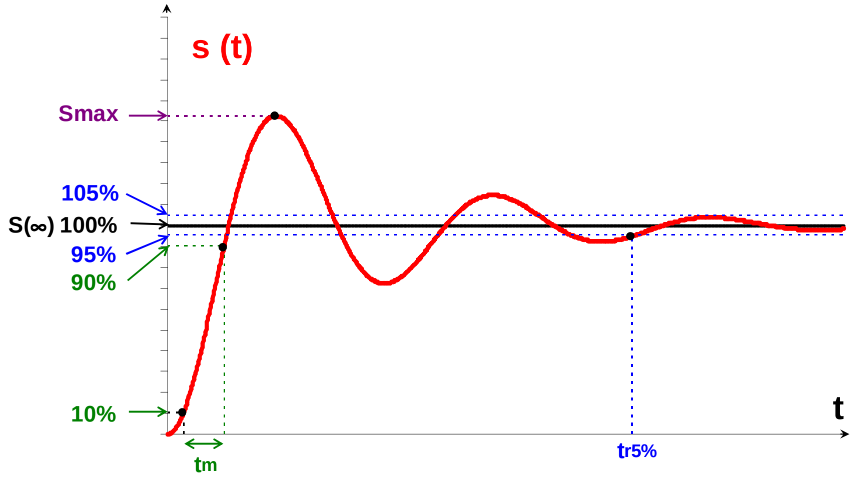
Données :

H = 20cm
M = 250kg
$k = 10.10^3 N.m^{-1}$
$f = 500 N.m^{-2}.s$



e- Propriétés de la courbe de réponse à un échelon (2° ordre avec m < 1)

Le graphe ci-dessous représente la réponse à un échelon d'un système du 2° ordre avec m < 1.



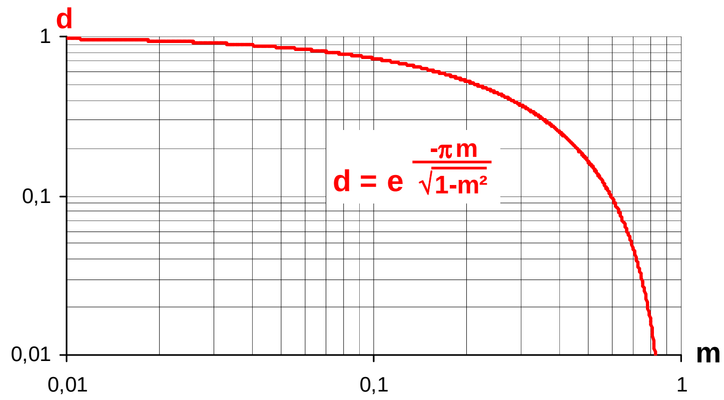
Propriétés de la courbe :

① Dépassement :

Le maximum de la courbe S_{max} permet de définir le dépassement : $\boxed{d = \dfrac{S_{max} - S_\infty}{S_\infty}}$

Le dépassement **d** ne dépend que de la valeur de **m** et vaut : $\boxed{d = e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}}$

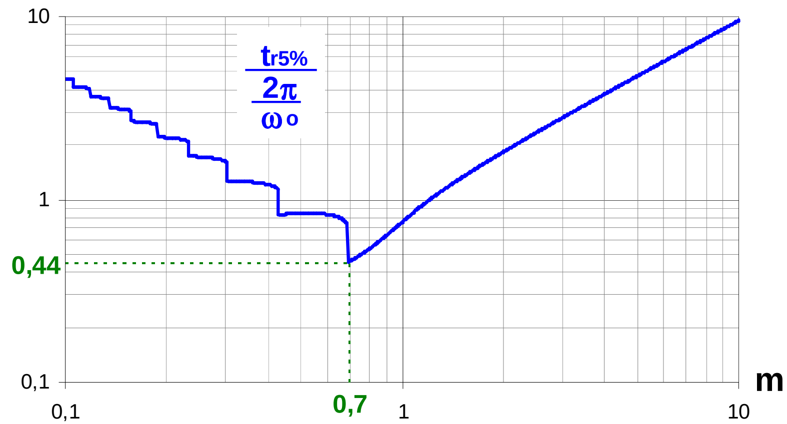
L'abaque ci-dessous représente les variations du dépassement **d** en fonction de l'amortissement **m** (les deux axes sont en coordonnées logarithmiques):



② Temps de réponse 5% :

Le temps de réponse à 5% $t_{r5\%}$ est le temps au bout duquel la grandeur de sortie **s(t)** reste comprise entre **95%** et **105%** de sa valeur finale S_∞.

$t_{r5\%}$ dépend de **m** et de ω_0 ; il n'existe pas de relation simple comme dans le cas du dépassement.
L'abaque ci-dessous permet de trouver une valeur approchée de $t_{r5\%}$ (attention, il faut multiplier la valeur trouvée en ordonnée par $2\pi/\omega_0$ pour avoir $t_{r5\%}$) :



On constate sur le graphe que $t_{r5\%}$ est minimal pour **m = 0,7** et sa valeur est

$$\boxed{t_{r5\%\,min} = 0{,}44\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

③ Temps de montée :

Le temps de montée $\mathbf{t_m}$ est le temps que met la grandeur de sortie **s(t)** pour passer de **10%** à **90%** de la valeur finale $\mathbf{S_\infty}$.

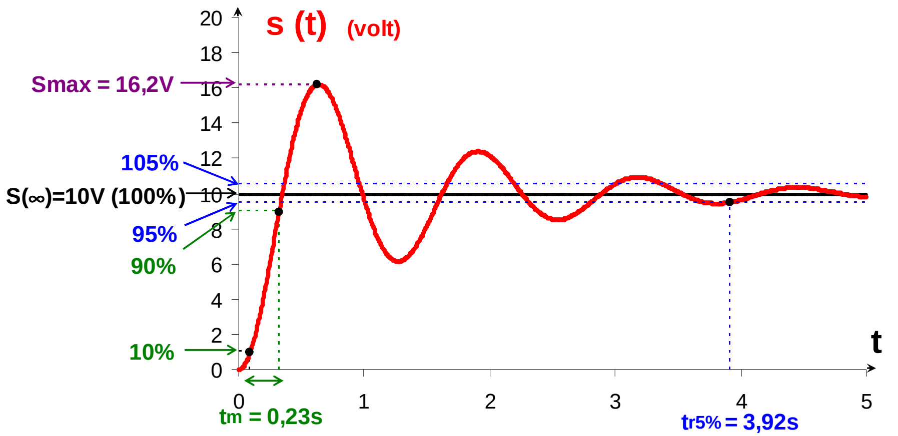
$\mathbf{t_m}$ se mesure directement sur la courbe **s(t)**.

Le temps de montée caractérise la vitesse de variation de la grandeur de sortie dès le début de l'excitation (échelon en entrée).

Etude d'un exemple (2°ordre avec $\boldsymbol{\omega_0}$ **= 5rad/s** ; **m = 0,15** et **échelon** d'entrée de **10V**):

■ Recherche de **d** ; $\mathbf{t_{r5\%}}$ et $\mathbf{t_m}$ à partir de la courbe **s(t)**.

Déterminons **d** ; $\mathbf{t_{r5\%}}$ et $\mathbf{t_m}$ à partir de la courbe **s(t)** (tension en volt) ci-dessous :



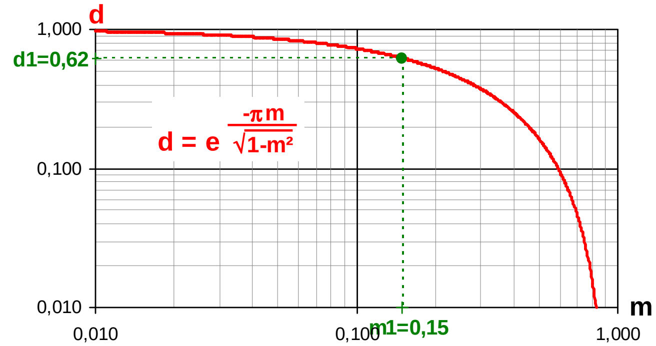
$S_{max} = 16{,}2 \;\Rightarrow\; d = \dfrac{S_{max} - S_\infty}{S\infty} = \dfrac{16{,}2 - 10}{10} \;\Rightarrow\; \mathbf{d \approx 0{,}62}$ ou **62%**.

La tension reste entre 9,5V et 10,5V à partir de t = 3,92s $\Rightarrow$ $\mathbf{t_{r5\%} \approx 3{,}92s}$.

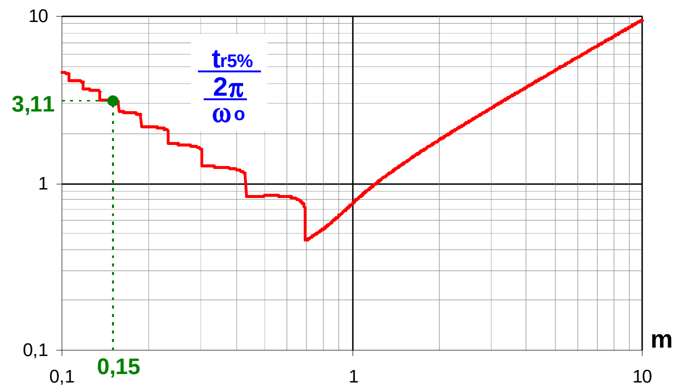
La tension atteint 1V (10%) à t_1 = 0,095s et atteint 9V (90%) à t_2 = 0,325s
$\Rightarrow$ $t_m = t_2 - t_1$ = 0,325-0,095 $\Rightarrow$ $\mathbf{t_m \approx 0{,}23s}$.

■ Recherche de **d** et $\mathbf{t_{r5\%}}$ à partir des abaques lorsque m et ω_0 sont donnés.

Sachant que **m = 0,15** , on trouve directement **d = 0,62 ou 62%** à partir de l'abaque ci-dessous :



Sachant que **m = 0,15** et $\boldsymbol{\omega_0}$ **= 5rad/s**, on trouve d'abord la valeur $\dfrac{t_{r5\%}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} \approx 3{,}11$ (abaque ci-dessous):



Pour finir, $t_{r5\%} = 3{,}11\dfrac{2\pi}{5}$ $\mathbf{\approx 3{,}91s}$.