Chapitre 2

SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

I- GÉNÉRALITÉS

1- Définition

Une suite de nombres réels est un **ensemble ordonné de nombres réels** indexé par des **nombres entiers naturels**.

Exemple : La suite de nombres { 1 ; 1,2 ; 1,4 ; 1,6 } contient 4 nombres réels.

2- Notation

La suite est en général notée (u_n) , (v_n) ou (C_n) pour les capitaux.
Son premier terme est noté u_0 , le suivant u_1 , le suivant u_2 … et ainsi de suite.
Le terme général est noté u_n et le suivant est alors u_{n+1}.

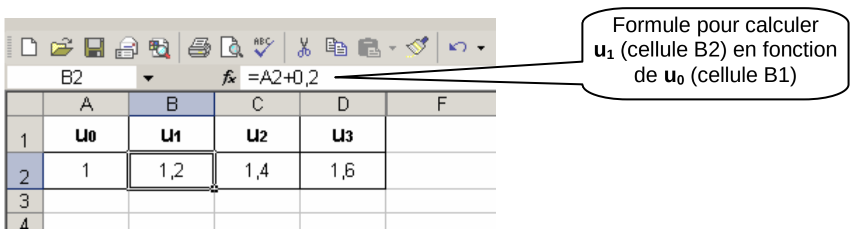
Remarque : Parfois, on commence la suite par u_1 et non u_0.

3- Construction d'une suite

Une même suite peut être principalement définie de deux manières.
Reprenons l'exemple du début :

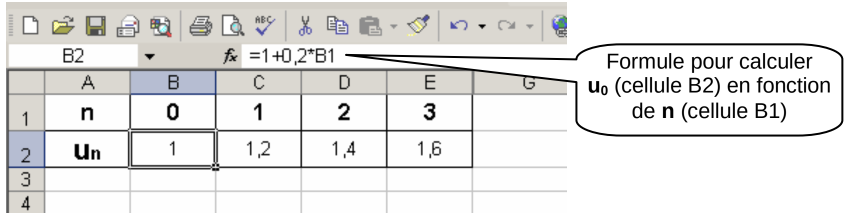
① La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 0,2$ pour $0 \leq n \leq 3$.
Cette définition permet de calculer tous les termes de la suite.

Calcul des termes à l'aide d'un logiciel tableur (copie d'écran) :



② La même suite (u_n) peut être définie par : $u_n = 1 + n \times 0,2$ pour $0 \leq n \leq 4$.
Cette définition permet aussi de calculer tous les termes de la suite.

Calcul des termes à l'aide d'un logiciel tableur (copie d'écran) :



4- Sens de variation et limite

Définitions :

- On dit qu'une suite (u_n) est **croissante** si le nombre u_n augmente quand n augmente.
- On dit qu'une suite (u_n) est **décroissante** si le nombre u_n diminue quand n augmente.

Exemples :

La suite définie par $u_1=1$, $u_2=3$, $u_3=5$,… est croissante.
La suite définie par $u_1=100$, $u_2=50$, $u_3=25$,… est décroissante.
La suite définie par $u_1=50$, $u_2=60$, $u_3=40$, $u_4=70$… n'est ni croissante, ni décroissante.

Définitions :

- On dit que la suite (u_n) tend vers 0 (ou converge vers 0), si quand n devient très grand le nombre u_n se rapproche de 0 : on note $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ (ou diverge), si quand n devient très grand le nombre u_n devient infiniment grand : on note $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemples :

La suite définie par $u_n = 2 + 4n$ diverge car lorsque n devient très grand, le nombre 4n devient "infiniment grand".
La suite définie par $u_n = 0,9^n$ converge vers 0 car pour n très grand, le nombre $0,9^n$ devient très proche de zéro.

II- SUITES ARITHMÉTIQUES

1- Définition

Une suite est arithmétique lorsque pour passer d'un terme au suivant, on **ajoute** toujours un même nombre, appelé **raison**.

Exemple : La suite { 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; …… } est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 2.

2- Relations générales

Relation 1 : La définition donne directement $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ (r est la raison).
On nommera u_0 (ou éventuellement u_1) le premier terme.

Cette relation devient contraignante lorsqu'on doit calculer un terme de rang élevé (u_{40} par exemple).

Relation 2 : ■ Si le premier terme est u_0 alors on a $\boxed{u_n = u_0 + n.r}$.

■ Si le premier terme est u_1 alors on a $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$.

Exercices :

① "Savoir démontrer" : Démontrer les deux formules.
② "Calcul de termes" : Exercices 1 et 10 page 43.
③ "Calcul de la raison" : Exercice 4 page 43.
④ "Résolution d'un problème" : Exercice 12 page 43.

3- Somme de n termes consécutifs

Relation générale :

Soit $S = \underbrace{u_k + u_{k+1} + ... + u_p}_{\text{termes consécutifs}}$ une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (u_n), on a alors :

$$\boxed{S = \text{"nombre de termes"} \times \frac{\text{"premier terme"} + \text{"dernier terme"}}{2}}$$

Cas particuliers :

■ Si le premier terme est u_1 : $\boxed{\underbrace{u_1 + u_2 + ... + u_n}_{\text{n termes}} = n\frac{u_1 + u_n}{2}}$

■ Si le premier terme est u_0 : $\boxed{\underbrace{u_0 + u_1 + ... + u_n}_{\text{n+1 termes}} = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}}$.

Exercices :

① "Savoir démontrer" : Démontrer les deux formules.
② "Calculer une somme de termes" : Exercices 41 et 51 page 46.
③ "Résoudre un problème" : Exercices 53 et 58 pages 46-47.

III- SUITES GÉOMÉTRIQUES

1- Définition

Une suite est géométrique lorsque pour passer d'un terme au suivant, on **multipie** toujours par un même nombre, appelé **raison**.

Exemple : La suite { 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 …… } est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.

2- Relations générales

Relation 1 : La définition donne directement $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$ (q est la raison).
On nommera u_0 (ou éventuellement u_1) le premier terme.

Comme pour les suites arithmétiques, cette relation devient contraignante lorsqu'on doit calculer un terme de rang élevé.

Relation 2 : ■ Si le premier terme est u_0 alors on a $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$.

■ Si le premier terme est u_1 alors on a $\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$.

Exercices :

① "Calcul de termes" : Exercices 17 et 22 page 44.
② "Calcul de la raison" : Exercice 20 page 44.
③ "Résolution de problèmes" : Exercices 27 et 28 page 44.

3- Somme de n termes consécutifs

Relation générale :

Soit $S = \underbrace{u_k + u_{k+1} + ... + u_p}_{\text{termes consécutifs}}$ une somme de termes consécutifs de la suite géométrique

(u_n) de raison q ≠ 1, on a alors :

$$\boxed{S = \text{"premier terme"} \times \frac{1 - q^{\text{"nombre de termes"}}}{1 - q}}$$

Cas particuliers :

- Si le premier terme est u_1 : $\boxed{\underbrace{u_1 + u_2 + ... + u_n}_{\text{n termes}} = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}}$
- Si le premier terme est u_0 : $\boxed{\underbrace{u_0 + u_1 + ... + u_n}_{\text{n+1 termes}} = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$.

Exercices :

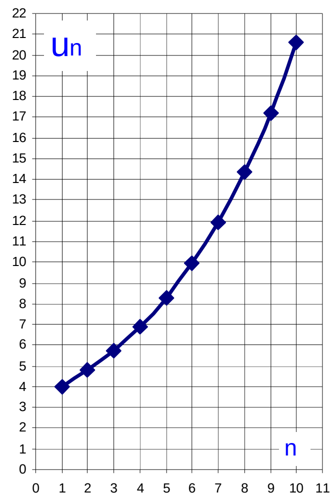
① "Avec la solution" : Exercices résolus 3 et 4 page 39.
② "Calculer une somme de termes" : Exercices 63 et 69 page 46.
③ "Résoudre un problème" : Exercices 76 et 78 pages 46-47.

III- SENS DE VARIATION ET LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

1- Représentation graphique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_k (u_k > 0) et de raison q (q > 0).
Dans le plan rapporté à un repère, la suite (u_n) est représenté par les points U_n (n ; u_n).
La courbe qui relie les points est dite "exponentielle".

Exemple :
Prenons la suite (u_n) de premier terme u_1 = 4 et de raison q = 1,2.
La représentation graphique est indiquée ci-contre :

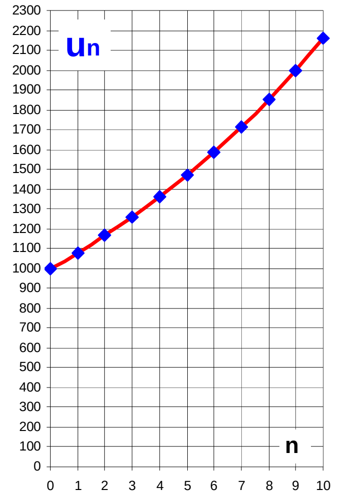


2- Cas où q > 1

Théorème :
Une suite géométrique de raison q avec q > 1 et de premier terme positif est strictement croissante et a pour limite + ∞. On écrit $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$

Exemple :

La suite (u_n) de premier terme u_0 = 1000 et de raison q = 1,02 est strictement croissante et a pour limite + ∞. On écrit $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$

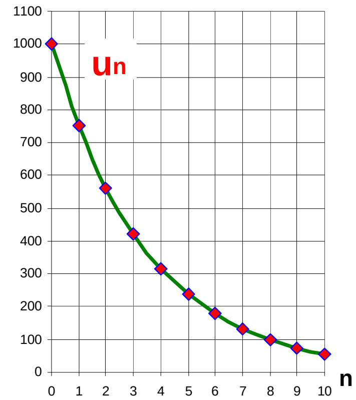


2- Cas où q > 1

Théorème :
Une suite géométrique de raison q avec 0 < q < 1 et de premier terme positif est strictement décroissante et a pour limite +0. On écrit $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

Exemple :

La suite (u_n) de premier terme u_0 = 1000 et de raison q = 0,75 est strictement décroissante et a pour limite 0. On écrit $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$



Exercices :

① "Avec solution" : Exercices 5 et 6 page 41.
② "Sens de variation et recherche de termes" : Exercice 79 et 82 page 49.
③ "Résolution de problèmes" : Exercices 88 ; 89 et 103 page 44.