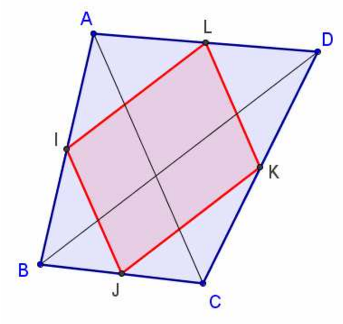
Corrigé de l'exercice 47 page 211

LE PARALLÉLOGRAMME DE VARIGNON

I- CAS GÉNÉRAL



Démonstration 1

Nous allons démontrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.
Pour cela, il suffit de montrer que (IL) est parallèle à (JK) et que (IJ) est parallèle à (LK).

① Considérons le triangle ABD. On a I milieu de [AB] et L milieu de [AD].
On en déduit donc que (IL) est parallèle à (BD) (théorème de la droite des milieux).
De même, dans le triangle BCD on a J milieu de [BC] et L milieu de [CD].
On en déduit donc que (JK) est parallèle à (BD).

Au final, (IL) // (BD) et (JK) // (BD) donc (IL) // (JK).

② En considérant le triangle ABC on montre de même que (IJ) // (AC).
En considérant le triangle ACD on montre de même que (LK) // (AC).

Au final, (IJ) // (AC) et (LK) // (AC) donc (IJ) // (LK).

③ On a montré que (IL) // (JK) et (IJ) // (LK) donc IJKL est un parallélogramme.

Démonstration 2

Nous allons ici utiliser le théorème traitant de la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle.
De plus, on a démontré que IJKL est un parallélogramme donc IJ = KL et IL = JK

① Considérons le triangle ABD. On a I milieu de [AB] et L milieu de [AD].

On a donc $IL = \frac{1}{2}BD$ (théorème du segment joignant deux milieux …).

② On fait le même raisonnement avec le triangle ABC avec I milieu de [AB] et J milieu de [BC]. Ce qui donne $IJ = \frac{1}{2}AC$.

③ Le périmètre P du parallélogramme IJKL est :

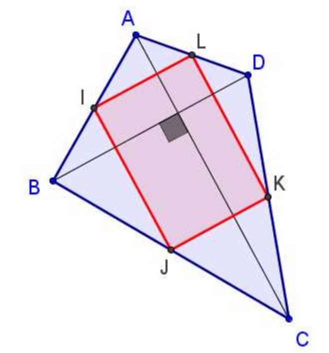
$P = IJ + JK + KL + IL$

$P = 2\times IL + 2\times IJ$ car $IJ = KL$ et $JK = IL$

$P = BD + AC$ car $IL = 1/2\ BD$ et $IJ = 1/2\ AC$

Donc le périmètre P est égal à la somme des longueurs des diagonales de ABCD.

II- CAS PARTICULIER



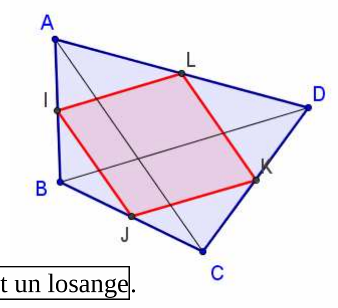
On a déjà démontré que IJKL est un parallélogramme.

1- Diagonales perpendiculaires

Pour montrer que le parallélogramme IJKL est un rectangle, il suffit de montrer que IJKL a au un angle droit, par exemple : $(IL) \perp (IJ)$.

On a déjà montré que (IL) // (BD) et que (IJ) // (AC) mais on a $(BD) \perp (AC)$, donc $(IL) \perp (IJ)$ et ainsi IJKL est un rectangle.

2- Diagonales de même longueur



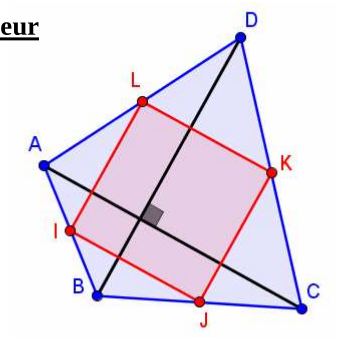
Comparons les longueurs des côtés de IJKL.

On a déjà montré que $IL = JK = \frac{1}{2}BD$

et que $IJ = KL = \frac{1}{2}AC$.

Mais BD = AC donc IL = JK = IJ = KL ainsi IJKL est un losange.

3- Diagonales perpendiculaires et de même longueur



D'après les parties **1-** et **2-** , le quadrilatère IJKL est à la fois un rectangle (cotés perpendiculaires) et un losange (côtés de longueur égale).

IJKL est donc un carré.