Chapitre III- 2-

RÉGIME SINUSOÏDAL GÉNÉRALITÉS

OBJECTIFS

- Montrer l'importance du régime sinusoïdal en électronique et dans d'autres domaines.
- Définir les grandeurs relatives à un signal sinusoïdal.
- Savoir représenter une grandeur sinusoïdale par un vecteur de Fresnel ou un nombre complexe.

I- POURQUOI ÉTUDIER LE RÉGIME SINUSOÏDAL ?

Dans beaucoup de domaines physiques, la représentation dans le temps d'une grandeur donne une courbe sinusoïdale.

Des grandeurs sinusoïdales sont rencontrées, par exemple, dans les domaines suivants :

① Electrotechnique : La tension du secteur " EDF " est une sinusoïde de fréquence 50 Hz et de valeur efficace 230V.

② Radiodiffusion : Le signal porteur de la station FM " RTL2 " est une sinusoïde de fréquence 94,6 MHz.

③ Acoustique : La note " La " fournie par un diapason est une sinusoïde de fréquence 440 Hz.

④ Mécanique : La course d'un piston dans son cylindre présente une variation quasi-sinusoïdale.

⑤ Electronique : La tension aux bornes d'un "quartz" qui cadence le microprocesseur d'un ordinateur est sinusoïdale de fréquence supérieure au GHz.
La mise au point d'un filtre passe par une étude harmonique (régime sinusoïdal).

Remarque : Lorsque le signal n'est pas sinusoïdal, on montrera qu'il peut se décomposer en une somme de plusieurs sinusoïdes appelées harmoniques.

L'étude du régime sinusoïdal est donc incontournable dans beaucoup de domaines et en particulier en électronique.

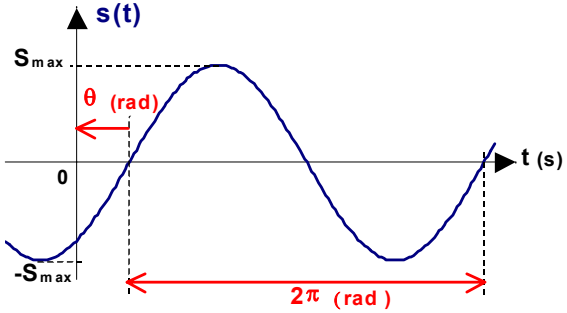
II- GRANDEURS RELATIVES AU RÉGIME SINUSOÏDAL

1- Expression temporelle

Une grandeur sinusoïdale **s(t)** est représenté par l'expression :

$$s(t) = S_{max}\sin(\omega t + \theta)$$

- S_{max} est l'amplitude (le signal varie de $+S_{max}$ à $-S_{max}$)
- t est la variable représentant le temps en seconde
- ω est la pulsion en $rad.s^{-1}$
- θ est la phase à l'origine en radian (compatible avec ωt en radian).



① Amplitude : L'amplitude S_{max} est la valeur maximale du signal qui va donc varier de $+S_{max}$ à $-S_{max}$.

② Pulsation : La pulsation représente l'angle ω parcouru par la sinusoïde durant une seconde.
La fréquence f représente le nombre de périodes effectuées durant une seconde. Sachant qu'**une période T** représente un **angle de 2π rad**, les relations entre ω, f et T sont :

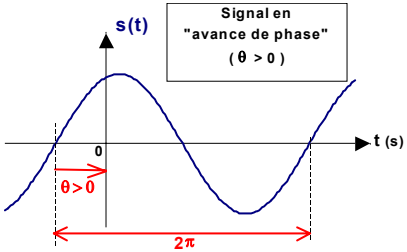
$$\omega = 2\pi f$$

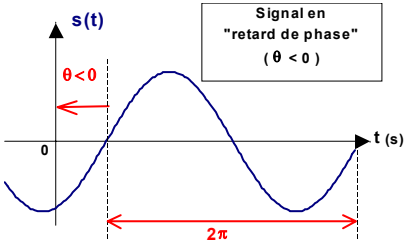
rad.s^{-1} Hz

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

rad.s^{-1} s

③ <u>Phase à l'origine</u> : La phase à l'origine (du temps) représente le décalage angulaire qu'il faut effectuer pour que la sinusoïde soit du type " sin ωt ". Une sinusoïde qui "passe par zéro" dans le sens croissant, possède une phase à l'origine nulle (θ = 0).





<u>Remarque</u> : L'origine des temps est choisit arbitrairement. Ce qui est important c'est la phase entre deux signaux; on prendra donc θ = 0 pour le signal de référence et on parlera de différence de phase entre les deux signaux.

2- Valeur moyenne

Dans la majorité des cas, les grandeurs sinusoïdales seront alternatives, c'est-à-dire à **valeur moyenne nulle**.
L'expression $s(t) = S_{max}\sin(\omega t + \theta)$ utilisée pour un signal sinusoïdal implique que la valeur moyenne notée < > soit nulle.
Dans tout les chapitres sur le régime sinusoïdal, on prendra $\boxed{< signal > = 0}$.

3- Valeur efficace

La valeur efficace est la " racine carrée de la valeur moyenne du carré".
Essayons d'exprimer la valeur efficace de $s(t) = S_{max}\sin(\omega t + \theta)$:

① Exprimons $s^2(t)$:

$$s^2(t) = S_{max}^2 \sin^2(\omega t + \theta)$$

$$\Rightarrow \quad s^2(t) = S_{max}^2\left(\frac{1 - \cos[2(\omega t + \theta)]}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad s^2(t) = \frac{S_{max}^2}{2} - \frac{\cos[2(\omega t + \theta)]}{2}.$$

② Exprimons $< s^2(t) >$:

$$< s^2(t) > = < \frac{S_{max}^2}{2} > - < \frac{\cos[2(\omega t + \theta)]}{2} >$$

$$\Rightarrow \quad < s^2(t) > = \frac{S_{max}^2}{2} \quad \text{car} \quad < \frac{\cos[2(\omega t + \theta)]}{2} > = 0$$

③ Exprimons S_{eff} noté S : $S_{eff} = \sqrt{\frac{S_{max}^2}{2}} = \frac{S_{max}}{\sqrt{2}}$.

$$\boxed{S_{eff} = S = \frac{S_{max}}{\sqrt{2}}}.$$

<u>Remarque</u> : ① La valeur efficace d'un signal sinusoïdal alternatif ne dépend pas de sa fréquence ni de sa phase.
② Dans la suite du cours, l'expression temporelle du signal sera :

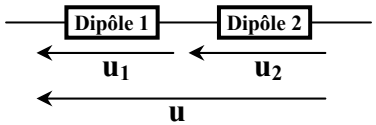
$$\boxed{s(t) = S\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta)} \quad \text{car} \quad S_{max} = S\sqrt{2}$$

<u>Application</u> : La valeur efficace de la tension du "secteur" est de 230V ce qui donne une sinusoïde d'amplitude $230 \times \sqrt{2} \approx$ **325 V**.

III- REPRÉSENTATION D'UNE GRANDEUR SINUSOÏDALE

1- Somme de deux grandeurs sinusoïdales

Dans le circuit représenté ci-contre on a :
$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$
car la loi des mailles et la loi des nœuds vues en régime continu s'applique aux **valeurs instantanées**.



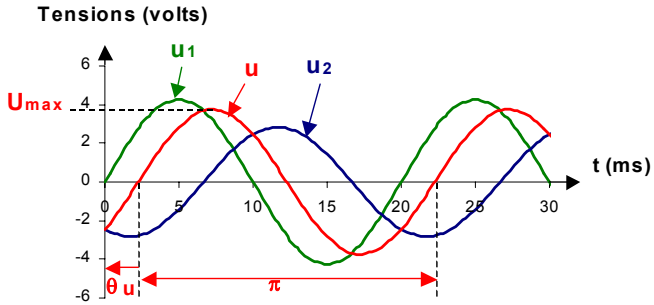
Effectuons la somme $u_1(t) + u_2(t)$ des tensions en ajoutant point par point les deux sinusoïdes relatives à $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
On a $u_1(t) = 3\sqrt{2}\sin(100\pi t)$ et $u_2(t) = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t - 2\pi/3)$

<u>On mesure sue le graphe</u> :

① $U_{max} \approx 3{,}74V$
$\Rightarrow U \approx 2{,}65V$.

② $\theta_u \approx -40{,}9°$.

③ $\omega \approx 100\pi$ rad.



Remarque : ① $U_1 + U_2 = 3 + 2 = 5V$ ce qui est différent de $U = 2{,}65V$
donc $\boxed{U \neq U_1 + U_2}$.
② $\theta_1 + \theta_2 = 0 - 120 = -120°$ ce qui est différent de $\theta = -40{,}9°$
donc $\boxed{\theta \neq \theta_1 + \theta_2}$.
③ La pulsation de u(t) est égale à la pulsation de $u_1(t)$ et de $u_2(t)$.

Bilan : ① **On ne doit pas ajouter les valeurs efficaces !**

② **On ne doit pas ajouter les phases à l'origine !**

③ La somme de deux sinusoïdes de fréquence identique donne une autre sinusoïde à la même fréquence.

④ L'évaluation de la somme de grandeurs sinusoïdales par addition des courbes point par point est une méthode longue et imprécise.
Nous allons utiliser d'autres outils pour simplifier l'étude du régime sinusoïdal.

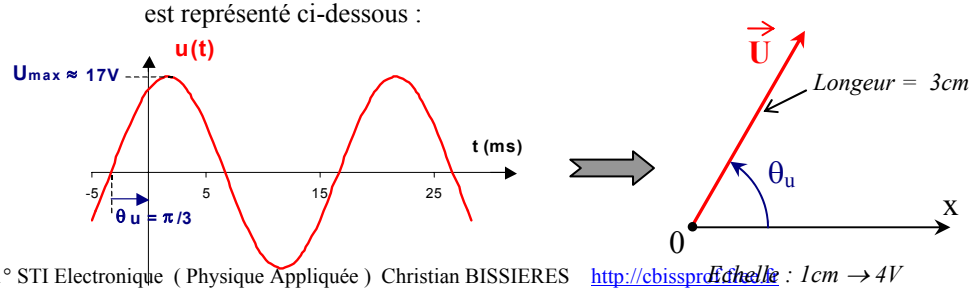
2- Vecteur de Fresnel

Pour un circuit linéaire, les deux grandeurs variables en régime sinusoïdal sont la valeur efficace et la phase à l'origine.
Nous allons voir qu'il est possible de représenter ces deux grandeurs à l'aide d'un vecteur et d'un axe Ox comme repère de référence.

Définition : Le vecteur $\vec{U}$ associé au signal sinusoïdal u(t) est appelé vecteur de Fresnel et a les propriétés suivantes :

① Son origine est le point 0.
② L'angle orienté $(\overrightarrow{Ox}, \vec{U})$ qu'il fait avec l'axe de référence Ox est égal à la phase à l'origine θ_U de u(t)
③ Sa longueur (norme) représente la valeur efficace U de u(t).

Exemple : Soit la tension $u(t) = 12\sqrt{2}\sin(100\pi t + \pi/3)$, le vecteur de Fresnel $\vec{U}$ associé est représenté ci-dessous :



Somme de deux grandeurs sinusoïdales

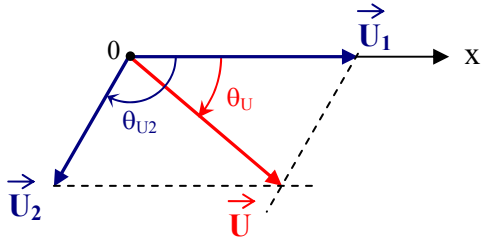
Reprenons l'exemple traité avec la méthode d'addition point par point avec :
$u_1(t) = 3\sqrt{2}\sin(100\pi t)$; $u_2(t) = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t - 2\pi/3)$ et $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$.
On rappelle qu'il faut prévoir la valeur efficace U et la phase à l'origine θu de u(t).

Traçons les vecteurs $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ relatifs à $u_1(t)$ et $u_2(t)$ puis effectuons graphiquement la somme $\vec{U} = \vec{U_1} + \vec{U_2}$ (shéma ci-dessous avec **1cm → 1V** pour échelle) :

Ensuite on mesure :

① Longueur $U \approx 2{,}65$ cm soit $\mathbf{U \approx 2{,}65\ V}$.

② Angle $\theta_u \approx -41°$ soit $\boldsymbol{\theta_U \approx -0{,}714\ rad}$.



Remarque : La méthode des vecteurs de Fresnel est plus rapide que la méthode d'addition point par point de $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
Si on désire une méthode non graphique, il faudra utiliser la représentation par des nombres complexes.

3- Nombres complexes

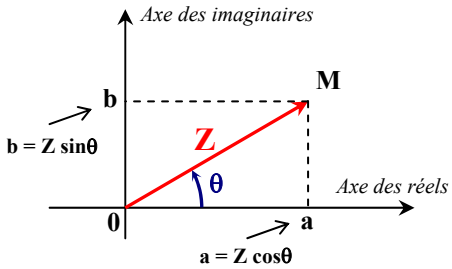
Un nombre complexe peut avoir une représentation vectorielle dans laquelle la longueur et l'angle représentent respectivement le module et l'argument du nombre complexe représenté.

Rappel de Mathématiques

Le nombre complexe $\mathbf{z = a + jb}$ est composé d'une partie réelle **a** et d'une partie imaginaire **b**.
La représentation vectorielle $\overrightarrow{OM}$ du nombre complexe permet de d'illustrer ses propriétés :

Représentation cartésienne : $z = a + jb$

Représentation géométrique : $z = (Z, \theta)$
Avec module → $Z = \sqrt{a^2 + b^2}$
et argument → $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ si $a > 0$.



Définition : Le nombre complexe $\underline{U} = (U\ ,\ \theta_U)$ associé au signal sinusoïdal u(t) a les propriétés suivantes :

① Son module U représente la valeur efficace de u(t).
② Son argument θ_U représente la phase à l'origine de u(t).

Exemple : Prenons par exemple le courant sinusoïdal $i(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 3\pi/4)$ (A).
Le nombre complexe $\underline{I}$ associé à i(t) est :
① $\underline{I} = [\ 5\ ,\ 3\pi/4\ ]$ (A) *(représentation polaire).*
② $\underline{I} = 5\cos(-3\pi/4) + j5\sin(-3\pi/4)$
$\underline{I} \approx -3{,}54 - j3{,}54$ (A) *(représentation cartésienne).*

Somme de deux grandeurs sinusoïdales

Reprenons l'exemple traité avec la méthode d'addition point par point et les vecteurs de Fresnel avec :
$u_1(t) = 3\sqrt{2}\sin(100\pi t)$; $u_2(t) = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t - 2\pi/3)$ et $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$.
On rappelle qu'il faut prévoir la valeur efficace U et la phase à l'origine θu de u(t).

Pour additionner ou soustraire des nombres complexes, il est préférable d'utiliser la forme cartésienne :
① $\underline{U_1} = [\ 3\ ,\ 0\ ] = 3\cos(0) + j3\sin(0)$
$\Rightarrow\ \underline{U_1} = 3$ (V).

② $\underline{U_2} = [\ 2\ ,\ -2\pi/3\ ] = 2\cos(-2\pi/3) + j2\sin(-2\pi/3)$
$\Rightarrow\ \underline{U_2} \approx -1 - j1{,}732$ (V).

③ $\underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2} \approx 2 - j1{,}732$ (V)
$\Rightarrow\ \underline{U} = [\ U\ ,\ \theta_U\ ]$ avec $U = \sqrt{2^2 + 1{,}732^2} \approx \mathbf{2{,}65\ V}$.
et $\theta_U = \tan^{-1}\dfrac{-1{,}732}{2} \approx \mathbf{-41°}$.

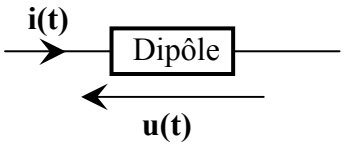
IV- DÉPHASAGE DU COURANT PAR RAPPORT À LA TENSION

1- Etude d'un exemple

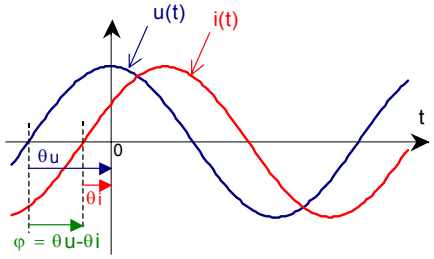
Considérons le dipôle linéaire représenté ci-dessous dans lequel on a :

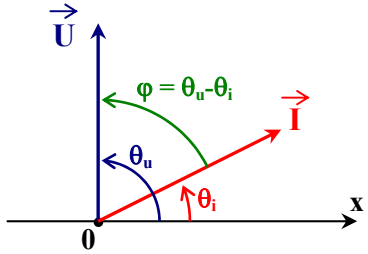
$u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta_u)$ avec $\theta_u = \dfrac{\pi}{2}$

et $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta_i)$ avec $\theta_i = \dfrac{\pi}{6}$



La figure ci-dessous représente le chronogramme et la représentation de Fresnel associée :





Si on s'intéresse au retard de **i** par rapport à **u**, on peut définir la grandeur $\boldsymbol{\varphi = \theta_u - \theta_i}$.
Dans notre exemple, on a $\varphi = \theta_u - \theta_i = \pi/2 - \pi/6 = \pi/3$.
⇒ On dira que le courant est en retard de π/3 par rapport à la tension.

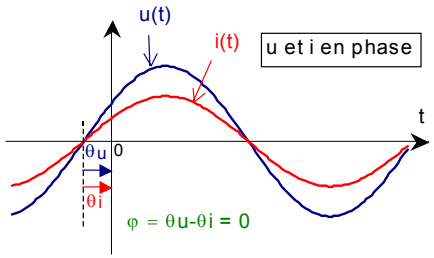
2- Définition

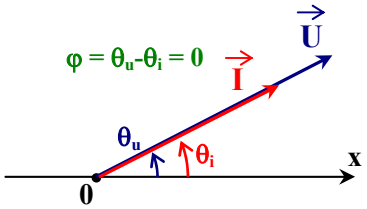
On appelle **déphasage φ** de la tension **u** par rapport au courant **i**, la différence entre la phase à l'origine $\boldsymbol{\theta_u}$ de **u** et la phase à l'origine $\boldsymbol{\theta_i}$ de **i**. $\boxed{\boldsymbol{\varphi = \theta_u - \theta_i}}$

Remarque : φ > 0 ⇒ i est en "retard" par rapport à u.

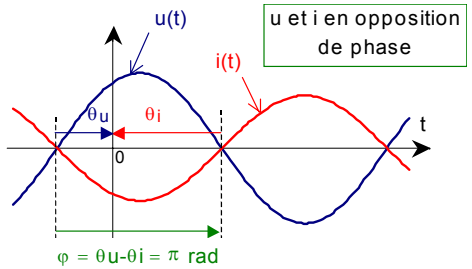
3- Cas particuliers

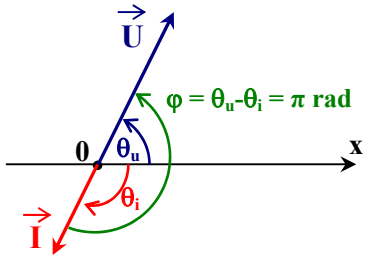
① φ = 0 rad ⇒ u et i sont **en phase**



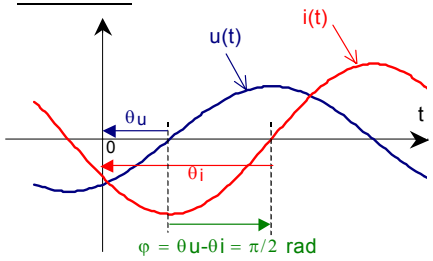


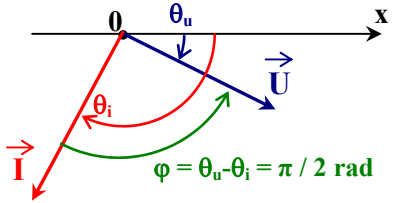
② φ = π rad ⇒ u et i sont **en opposition de phase**



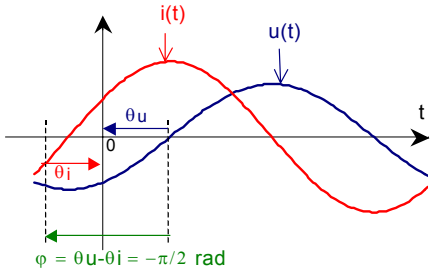


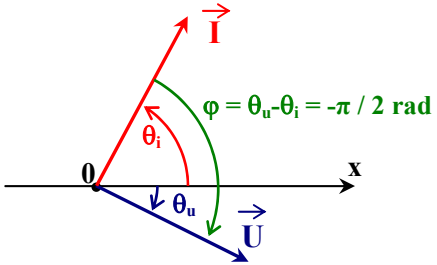
② $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad ⇒ i est en **quadrature retard** par rapport à u





③ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad ⇒ i est en **quadrature avance** par rapport à u





4- Méthodes de mesure de déphasage à l'oscilloscope *(de la moins précise à la plus précise)*

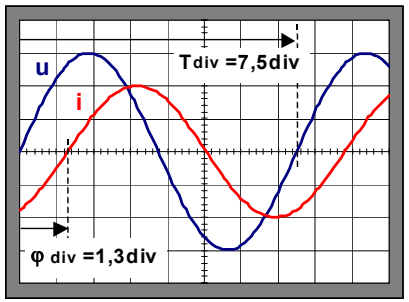
① Affichage d'une période sans décalibrer la base de temps:

Il suffit d'afficher une période du signal et d'effectuer les opérations suivantes
- Compter le nombre de divisions que contient la période : T_{div} ;
- compter le nombre de divisions qui représente le décalage : φ_{div}.

⇒ Le résultat en degrés est $\varphi = \frac{\varphi_{div}}{T_{div}} \times 360$ (degrés).

⇒ Le résultat en radians est $\varphi = \frac{\varphi_{div}}{T_{div}} \times 2\pi$ (radians).

Exemple



$\varphi = \frac{1,3}{7,5} \times 360$ **= 62,4°**

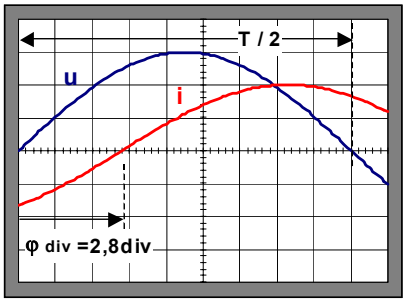
ou $\varphi = \frac{1,3}{7,5} \times 2\pi \approx$ **1,09 rad**.

② Affichage d'une demi-période sur neuf divisions en décalibrant la base de temps :

- Agir sur le bouton de décalibrage de la base temps pour faire coïncider une demi-péride sur 9 divisions (une division représente alors 180/9 = 20°)
- compter le nombre de divisions qui représente le décalage : φ_{div}.

⇒ Le résultat en degrés est $\varphi = \varphi_{div} \times 20$ (degrés).

Exemple :



$\varphi = 2,8 \times 20 =$ **56°**

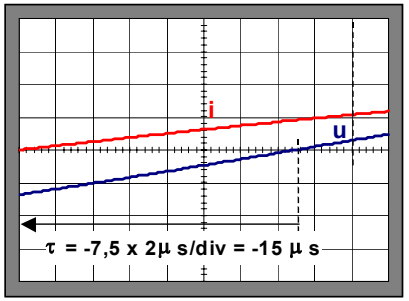
③ Etirement maximum pour la mesure du décalage (la période du signal doit être connue à l'avance)

- Régler la base de temps pour que la portion des signaux représentant le décalage soit maximale sur l'écran (la base de temps ne doit pas être décalibrée).
- Mesurer le temps τ de décalage des deux signaux.

⇒ Le résultat en degrés est $\varphi = \frac{\tau}{T} \times 360$ (degrés).

⇒ Le résultat en radians est $\varphi = \frac{\tau}{T} \times 2\pi$ (radians).

Exemple : Mesure du déphasage pour des signaux de fréquence 5 kHz (T = 1/5000 = 200 µs)



Calibre base de temps : 2 µs/div

$\tau = -7,5 \times 2.10^{-6} = -15\mu s$

$\varphi = \frac{\tau}{T} \times 360 = \frac{-15.10^{-6}}{200.10^{-6}} \times 360$

⇒ φ = - 27°.

$\varphi = \frac{\tau}{T} \times 2\pi = \frac{-15.10^{-6}}{200.10^{-6}} \times 2\pi$

⇒ $\varphi \approx$ - 0,471 rad.