Chapitre III- 3-

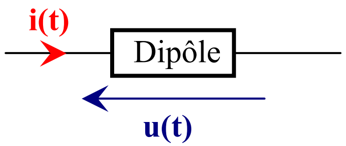
RÉGIME SINUSOÏDAL
DIPÔLES ÉLÉMENTAIRES

OBJECTIFS

Il s'agit d'étudier la relation courant-tension dans les dipôles linéaires élémentaires (résistances , inductances et condensateurs).
La relation courant-tension étudiée sera de deux types :
① Rapport des valeurs efficaces **U / I = Z**.
② Déphasage φ de **i** par rapport à **u**.
On étudiera aussi l'influence de la fréquence sur les deux paramètres **Z** et φ.

I- GÉNÉRALITÉS

Si un dipôle linéaire est soumis à une tension sinusoïdale $\mathbf{u(t) = U\sqrt{2}\,\sin(\omega t)}$; il sera alors traversé par un courant sinusoïdal $\mathbf{i(t) = I\sqrt{2}\,\sin(\omega t - \varphi)}$.



1- Impédance et admittance

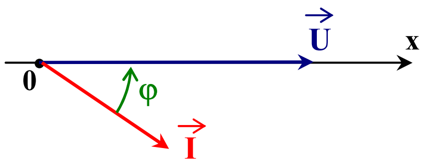
On appelle Impédance du dipôle la grandeur **Z = U / I** (en **Ω**).
On appelle Admittance du dipôle la grandeur **Y = I / U** (en **S ou Ω^{-1}**).

2- Déphasage

On appelle déphasage de **i** par rapport à **u** l'angle φ représentant le retard angulaire de **i** par rapport à **u** (en **degrés** ou **radians**).

3- Représentation de Fresnel

On représente **u** par un vecteur de module **U** et faisant un angle θ_u avec l'axe **Ox**
($\theta_u = 0$ dans notre exemple).
On représente **i** par un vecteur de module **I** et faisant un angle θi avec l'axe Ox
($\theta i = -\varphi$ dans notre exemple).



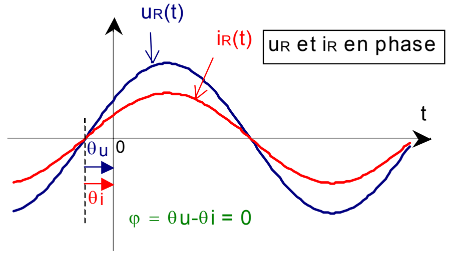
4- Notation complexe

On représente **u** par le nombre complexe $\underline{\mathbf{U}}$ = **[U ; θ_u]**.
On représente **i** par le nombre complexe $\underline{\mathbf{I}}$ = **[I ; θ_i]**.
On représente l'impédance par le nombre complexe $\underline{\mathbf{Z}}$ = [U/I ; $\theta_u - \theta_i$] = **[U/I ; φ]**.
On représente l'admittance par le nombre complexe $\underline{\mathbf{Y}}$ = [I/U ; $\theta_i - \theta_u$] = **[I/U ; -φ]**.

II- RÉSISTANCE LINÉAIRE

1- Expérience

Alimentons une résistance linéaire **R** avec une source de tension sinusoïdale d'amplitude et de fréquence réglable.
Nous constatons les résultats suivants :



① Variation de l'amplitude :
Le rapport des valeurs efficaces $\mathbf{U_R}$ **/** $\mathbf{I_R}$ est constant et égal à **R.**
Le déphasage φ est constant et égal à zéro.

② Variation de la fréquence :
Le rapport des valeurs efficaces $\mathbf{U_R}$ **/** $\mathbf{I_R}$ est constant et égal à **R.**
Le déphasage φ est constant et égal à zéro.
$\Rightarrow$ *La fréquence n'agit pas sur le comportement de la résistance.*

2- Interprétation

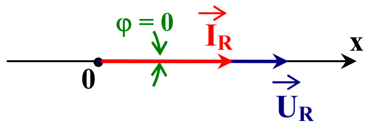
La résistance est soumise à la tension $\mathbf{u_R(t) = U_R\sqrt{2}\,\sin(\omega t)}$.
La relation courant-tension pour une résistance est $\mathbf{u_R(t) = Ri_R(t)}$.
On a $\mathbf{i_R(t) = I_R\sqrt{2}\,\sin(\omega t - \varphi)}$ avec $i_R(t) = \dfrac{u_R(t)}{R} = \dfrac{U_R}{R}\sqrt{2}\,\sin(\omega t)$.

Par identification, on a donc $\mathbf{I_R = \dfrac{U_R}{R}}$ et $\varphi = \mathbf{0}$.

3- Représentation de Fresnel et notation complexe

① Représentation de Fresnel :

$\mathbf{u_R}$ et $\mathbf{i_R}$ son en phase, il est donc judicieux de les placer sur l'axe **Ox** en prenant arbitrairement $\theta_u = 0$).



② Notation complexe :

On a $\underline{U}_R = \underline{Z}_R\,\underline{I}_R$ avec $\boxed{\underline{Z}_R = R + j0}$ ou $\boxed{\underline{Z}_R = [R;0]}$.

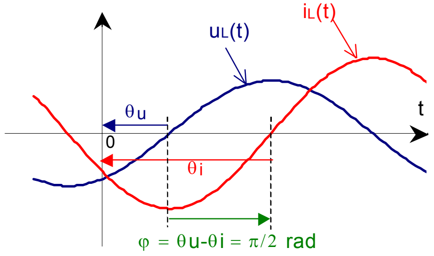
On a aussi $\underline{I}_R = \underline{Y}_R\underline{U}_R$ avec $\boxed{\underline{Y}_R = \frac{1}{R} + j0}$ ou $\boxed{\underline{Y}_R = \left[\frac{1}{R};0\right]}$.

III- BOBINE PARFAITE

1- Expérience

Alimentons une bobine parfaite d'inductance **L** avec une source de tension sinusoïdale d'amplitude et de fréquence réglable.
Nous constatons les résultats suivants :

① Variation de l'amplitude :
Le rapport des valeurs efficaces $\mathbf{U_L / I_L}$ est constant et égal à $\mathbf{L\omega}$.
Le déphasage φ est constant et égal à $\boldsymbol{+\pi/2}$.



② Variation de la fréquence :
Le rapport des valeurs efficaces $\mathbf{U_L / I_L}$ est proportionnel à ω ($U_L / I_L = L\omega$).
Le déphasage φ est constant et égal à $\boldsymbol{+\pi/2}$.
⇒ *La fréquence n'agit pas sur le déphasage φ mais seulement sur l'impédance.*

⇒ Plus la fréquence est élevée, plus l'impédance Z_L est grande.

2- Interprétation

La bobine (inductance) est soumise au courant $i_L(t) = I_L\sqrt{2}\,\sin(\omega t)$.

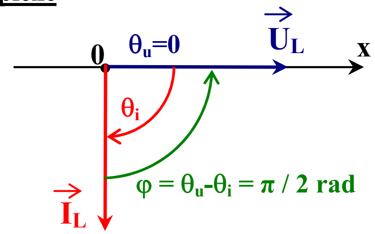
La relation courant-tension pour une inductance est $u_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$.

Ce qui donne $u_L(t) = L\omega I_L\sqrt{2}\cos(\omega t)$ ⇒ $\mathbf{u_L(t) = L\omega I_L\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \pi/2)}$
Par identification, on a donc $\mathbf{U_L = L\omega I_L}$ et $\boldsymbol{\varphi = \pi/2}$.

3- Représentation de Fresnel et notation complexe

① Représentation de Fresnel :

$\mathbf{i_L}$ est en quadrature retard sur $\mathbf{u_L}$, on peut, par exemple, placer $\vec{U}_L$ sur l'axe **Ox** en prenant arbitrairement $\theta_u = 0$).



② Notation complexe :

On a $\underline{U}_L = \underline{Z}_L\,\underline{I}_L$ avec $\boxed{\underline{Z}_L = [L\omega;+\pi/2]}$ ou $\boxed{\underline{Z}_L = jL\omega}$.

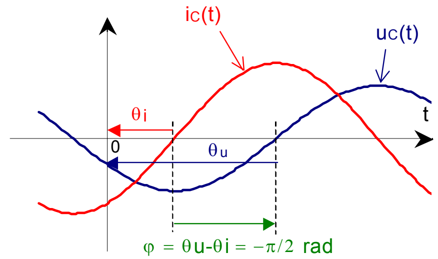
On a aussi $\underline{I}_L = \underline{Y}_L\underline{U}_L$ avec $\boxed{\underline{Y}_L = \left[\frac{1}{L\omega};-\pi/2\right]}$ ou $\boxed{\underline{Y}_L = -j\frac{1}{L\omega}}$.

IV- CONDENSATEUR PARFAIT

1- Expérience

Alimentons un condensateur parfait de capacité **C** avec une source de tension sinusoïdale d'amplitude et de fréquence réglable.
Nous constatons les résultats suivants :

① Variation de l'amplitude :
Le rapport des valeurs efficaces $\mathbf{U_C / I_C}$ est constant et égal à $\mathbf{\dfrac{1}{C\omega}}$
Le déphasage φ est constant et égal à $\boldsymbol{-\pi/2}$.



② Variation de la fréquence :
Le rapport des valeurs efficaces $\mathbf{U_C / I_C}$ est inversement proportionnel à ω ($U_C / I_C = 1/(C\omega)$).
Le déphasage φ est constant et égal à $\boldsymbol{-\pi/2}$.
⇒ *La fréquence n'agit pas sur le déphasage φ mais seulement sur l'impédance.*

⇒ Plus la fréquence est élevée, plus l'impédance Z_C est faible.

2- Interprétation

Le condensateur est soumis à la tension $u_C(t) = U_C\sqrt{2}\sin(\omega t)$.

La relation courant-tension pour une résistance est $i_C(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt}$.

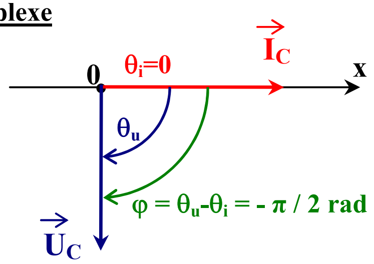
Ce qui donne $i_C(t) = C\omega U_C\sqrt{2}\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad i_C(t) = C\omega U_C\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/2)$

Par identification, on a donc $\mathbf{U_C = \dfrac{1}{C\omega} I_C}$ et $\boldsymbol{\varphi = -\pi/2}$.

3- Représentation de Fresnel et notation complexe

① Représentation de Fresnel :

$\mathbf{i_C}$ est en quadrature avance sur $\mathbf{u_C}$, on peut, par exemple, placer $\vec{I_C}$ sur l'axe **Ox** en prenant arbitrairement $\theta_i = 0$).

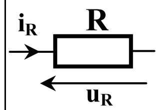
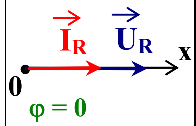
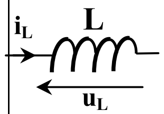
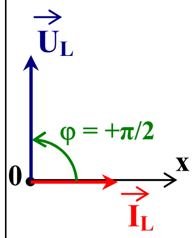
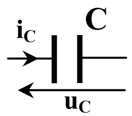


② Notation complexe :

On a $\underline{U}_C = \underline{Z}_C\,\underline{I}_C$ avec $\boxed{\underline{Z}_C = [\frac{1}{C\omega}; -\pi/2]}$ ou $\boxed{\underline{Z}_C = \frac{-j}{C\omega} = \frac{1}{jC\omega}}$.

On a aussi $\underline{I}_C = \underline{Y}_C\underline{U}_C$ avec $\boxed{\underline{Y}_C = [C\omega; +\pi/2]}$ ou $\boxed{\underline{Y}_C = jC\omega}$.

V- TABLEAU RÉCAPITULATIF

Dipôle	Relation **u(t) ↔ i(t)**	Relation entre **U** et **I** (valeurs efficaces)	Impédance et admittance complexes	Représentation de Fresnel
Résistance linéaire 	$u_R = Ri_R$	$\mathbf{U_R = RI_R}$ $I_R = \frac{1}{R}U_R$	$\mathbf{\underline{Z}_R = R}$ $\underline{Z}_R = [R;0]$ $\mathbf{\underline{Y}_R = \frac{1}{R}}$ $\underline{Y}_R = [\frac{1}{R};0]$	
Bobine parfaite 	$u_L = L\frac{di_L}{dt}$	$\mathbf{U_L = L\omega I_L}$ $I_L = \frac{1}{L\omega}U_L$	$\mathbf{\underline{Z}_L = jL\omega}$ $\underline{Z}_L = [L\omega;+\pi/2]$ $\mathbf{\underline{Y}_L = -j\frac{1}{L\omega}}$ $\underline{Y}_L = [\frac{1}{L\omega};-\pi/2]$	
Condensateur parfait 	$i_C = C\frac{du_C}{dt}$	$\mathbf{U_C = \frac{1}{C\omega}I_C}$ $I_C = C\omega U_C$	$\mathbf{\underline{Z}_C = -j\frac{1}{C\omega}}$ $\underline{Z}_C = [\frac{1}{C\omega};-\pi/2]$ $\mathbf{\underline{Y}_C = jC\omega}$ $\underline{Y}_C = [C\omega;+\pi/2]$